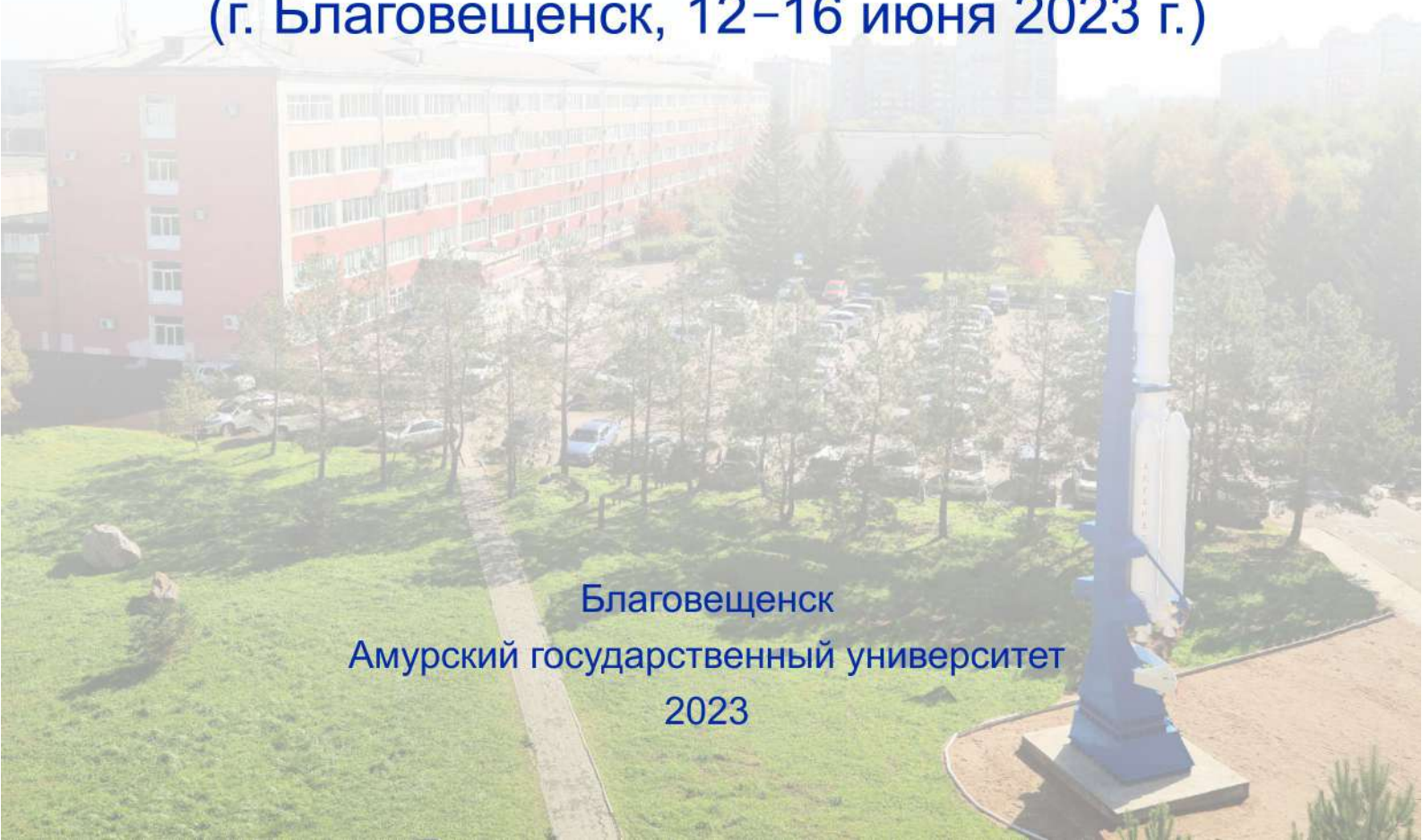




# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Материалы II Международного семинара  
(г. Благовещенск, 12–16 июня 2023 г.)



Благовещенск  
Амурский государственный университет  
2023

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Амурский государственный университет»

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

# **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА**

Материалы II Международного семинара  
(г. Благовещенск, 12–16 июня 2023 г.)

Благовещенск  
Амурский государственный университет  
2023

УДК 519.6:004.4  
ББК 22.19+32.973-018  
В 92

Печатается по решению организационного и  
программного комитетов II Международного семинара  
«Вычислительные технологии и прикладная математика»

**Вычислительные технологии и прикладная математика** : Материалы II  
Международного семинара (12–16 июня 2023 г., Благовещенск) / отв. ред. А. Г. Масловская.  
– Благовещенск : Изд.-во Амурского гос. университета, 2023. – 240 с.

В сборнике представлены материалы докладов с результатами научных исследований по  
следующим тематическим направлениям: математическое и оптимизационное моделирование,  
вычислительные алгоритмы и компьютерное моделирование, интеллектуальный анализ данных,  
проектирование и диагностика вычислительных систем, высокопроизводительные вычисления и их  
приложения.

***Состав организационного комитета:***

Ректор АмГУ, проф. **А. Д. Плутенко** – председатель  
Директор ИПМ ДВО РАН, академик РАН **М. А. Гузев**  
Ректор ТГУ, проф. **Э. В. Галажинский**  
Проректор по научной работе ДВФУ, проф. **А. С. Самардак**  
Директор ХО ИПМ ДВО РАН, проф. **К. А. Чехонин**  
Проректор по учебной и научной работе АмГУ, проф. **А. В. Лейфа**  
Директор Департамента математического и компьютерного моделирования ДВФУ **А. А. Сущенко**  
Нач. отдела научно-исследовательских работ АмГУ, доц. **Л. П. Яцевич**

***Состав программного комитета:***

Проф. **Е. А. Нурминский** (председатель, ДВФУ, Владивосток)  
Проф. **Г. В. Алексеев** (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)  
Проф. **М. П. Галанин** (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва)  
Проф. **Е. Л. Еремин** (АмГУ, Благовещенск)  
Проф. **А. В. Замятин** (ТГУ, Томск)  
Проф. **А. Е. Ковтанюк** (ДВФУ, Владивосток)  
Проф. **А. Г. Масловская** (АмГУ, Благовещенск)  
Проф. **Д. Л. Ревизников** (МАИ, Москва)  
Чл.-корр. РАН **С. И. Смагин** (ВЦ, ДВО РАН, Хабаровск)  
Чл.-корр. РАН **Е. Я. Фрисман** (ИКАРП ДВО РАН, Биробиджан)  
Проф. **А. Ю. Чеботарев** (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)  
Проф. **С. П. Шарый** (ФИЦ ИВТ, Новосибирск)  
Prof. **G. M. Amiraliyev** (Erzincan Binali Yıldırım University, Erzincan)  
Prof. **Liu Chi** (Beijing Institute of Technology, Beijing)  
Prof. **Xu Runzhang** (Harbin Engineering University, Harbin)

Ответственный редактор – **А. Г. Масловская**, д-р физ.-мат. наук, проф. (АмГУ, Благовещенск)

*Материалы печатаются в авторской редакции*

ISBN 978-5-93493-392-1  
DOI: 10.22250/9785934933921

©ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет», 2023  
© Коллектив авторов, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

Абдуллина А. А., Зинуров В. Э. Как использовать интеллектуальный анализ данных для принятия осмысленных решений .....	7
Абрамов А. Л., Пугач П. А. Массовая оценка жилой недвижимости с использованием первичной графовой модели города .....	9
Алексеев Г. В., Лобанов А. В. Применение оптимизационных методов для численного решения 3D задач электростатической маскировки.....	12
Амосова Е. В. Численное адаптированное моделирование гидродинамических процессов прибрежных зон .....	15
Амосова Е. В., Сапожников А. Д. Вариационные методы изометрической интерполяции двумерной поверхности .....	17
Андросов А. С., Шарый С. П. Intvalpy – библиотека интервальных вычислений на языке Python .....	19
Артемьева И. Л., Чусова А. Е., Чусов А. А. Моделирование конкуренции за кэш в многоядерном процессоре.....	22
Бабенко М. Г., Безуглова Е. С. Эффективная реализация китайской теоремы об остатках.....	25
Барабаш Т. К., Салмиянов В. О., Афанасов Л. С. Фрактальная характеристика границ сегнетоэлектрических доменов в режиме динамического контраста.....	28
Бештоков М. Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения гиперболического типа с двумя операторами дробного дифференцирования .....	31
Бештокова З. В. Численное решение интегро-дифференциального уравнения диффузии в многомерной области с неоднородными краевыми условиями первого рода.....	34
Бондарь Д. А., Агапова Е. Г. Использование нейронных сетей для предсказания онкологических заболеваний в Хабаровском крае .....	37
Борисов П. Д., Косолапов Ю. В. Способ оценки эффективности и стойкости обфусцирующих преобразований для бинарных исполнимых файлов.....	40
Борисова В. В., Дегтярев Д. В., Макаров А. Г., Солдатов К. С., Нефедев К. В. Реализация алгоритма квантового факторинга Шора .....	43
Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н. О единственности решения задачи мультипликативного управления для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика .....	47
Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. Краевые и экстремальные задачи для уравнения реакции-диффузии-конвекции с переменными коэффициентами .....	50
Веселова Е. М. Настройка сеточных параметров при численной реализации 2D модели Ландау – Халатнакова в COMSOL Multiphysics .....	52
Водинчар Г. М., Фещенко Л. К. Составление спектральных моделей геодинамо методами компьютерной алгебры .....	55
Ворновских П. А., Прохоров И. В. О локализации поверхностей разрыва коэффициента рассеяния уравнения переноса излучения .....	58
Галанин М. П., Лукин В. В., Родин А. С. Программная платформа Теметос и ее применение для решения задач математического моделирования .....	60
Голубев А. Е. Управление движением подводного объекта с учетом ограничений на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений .....	63
Гордин С. А., Зайченко И. В., Животова А. А. Математическая модель водогрейного котла и ее экспериментальная апробация .....	66
Донская М. А., Яровенко И. П. Решение нестационарного уравнения переноса излучения с использованием графических ускорителей.....	68
Дончак А. А., Бризицкий Р. В. Оценки устойчивости решений задач мультипликативного управления для нелинейной модели реакции-диффузии.....	70
Евдокимова В. В., Афанасьева Е. Ю., Масловская А. Г. Спецификация сигналов аускультации легких на основе методов фрактального и мультифрактального анализа .....	72



Ерёмин Е. Л., Никифорова Л. В., Шеленок Е. А. Разработка периодической системы адаптивно-робастного управления объектом с входным запаздыванием .....	75
Ерёмин Е. Л., Смирнова С. А., Шеленок Е. А. Оптимизационное моделирование гибридной системы управления многорежимным объектом в схеме с неявным эталоном .....	78
Ерёмин Е. Л., Шеленок Е. А. Структурно-параметрический синтез алгоритмов периодической системы нелинейного управления для класса неаффинных объектов .....	81
Жданова О. Л., Козицкая И. С. Моделирование динамики планктонного сообщества с учетом избирательности и типа питания зоопланктона.....	84
Зоркальцев В. И. Метод внутренних точек: прошлое и будущее .....	87
Зоркальцев В. И., Князев А. С. Сравнительный анализ методов оценки динамики смертности рыб озера Байкал на основе вычислительных экспериментов .....	91
Исаева Е. С., Громыко А. А., Неверова Г. П. Математическое моделирование динамики популяций морских организмов, изменяющих пол.....	95
Казаков Е. А., Водинчар Г. М. Моделирование динамических режимов в эредитарной двумодовой модели динамо .....	98
Капелько Э. А., Зайченко Е. А., Зубков Е. А. Анализ взаимосвязи между различными пищевыми привычками и общим состоянием здоровья с использованием данных из «eating & health module dataset».....	101
Карпенко А. Д., Войтко Т. Д., Фурс К. В. Применение методов компьютерного моделирования для генерации потенциальных лекарственных препаратов против хронического миелоидного лейкоза.....	104
Коваленко Е. О., Прохоров И. В., Сущенко А. А. Экстраполяционные алгоритмы улучшения качества гидролокационных изображений.....	107
Колобов А. Н., Фрисман Е. Я. Индивидуально-ориентированный подход в моделировании динамики древесных сообществ.....	109
Кузнецов К. С., Амосова Е. В. Применение технологии искусственного интеллекта для численного моделирования одномерных уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой среды .....	112
Кузора С. С. Исследование динамики факторов влияния на эффективность организаций инновационной инфраструктуры .....	115
Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Генетическая дивергенция в системе двух миграционно связанных популяций с пересекающимися поколениями и плотностно зависимом лимитировании гаметопродукции.....	118
Лобанова Э. А., Овчинников П. А., Трефилов И. В., Стронгин В. С., Шевченко Ю. А. Температурные зависимости термодинамических характеристик искусственного спинового льда на решётке Апахмея .....	121
Логинова Д. П., Стронгин В. С., Нефедев К. В. Разработка квантового алгоритма поиска минимума энергии в спиновых системах с взаимодействием.....	124
Маергойз Л. С. Модель оптимального управления режимов работы источников загрязнения атмосферы мегаполиса.....	127
Максимов П. А. Применение нейронных сетей в решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений .....	130
Максимова Н. Н., Чепикова А. Ю. Детерминированная модель с запаздыванием для исследования динамики хронического лимфолейкоза.....	132
Минуллин Д. А., Хайруллина Л. Э., Гафаров Ф. М. Нейросетевой подход к анализу профессиональных дефицитов учителей.....	135
Мороз Л. И. Численный подход к реализации релаксационной дробно-дифференциальной модели зарядки полярных диэлектриков.....	138
Мороз Л. И., Масловская А. Г. Численный алгоритм решения волнового дробно-дифференциального уравнения Ландау – Гинзбурга – Девошира.....	141
Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л. Идентификация порядков производных дробно-дифференциальных уравнений в интервальной постановке .....	144

Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л. Интерполяционный подход к решению дробно-дифференциальных уравнений с интервальными порядками производных .....	147
Неверова Г. П., Жданова О. Л. Эволюция разных гаплотипов фитопланктона в результате воздействия зоопланктона.....	150
Ни А. Э. Трехмерное моделирование процесса сопряженного теплопереноса гибридным решеточным методом Больцмана.....	153
Овчинников П. А., Трефилов И. В., Лобанова Э. А., Стронгин В. С., Шевченко Ю. А. Исследование скрытых перколирующих процессов в модели Изинга алгоритмами нейронных сетей .....	155
Пак Н. М., Ковтанюк А. Е. Итерационный алгоритм решения начально-краевой задачи для модели внутривенной лазерной абляции.....	158
Прохоров И. В., Ворновских П. А., Яровенко И. П. Экстраполяционные подходы к улучшению качества изображений в рентгеновской импульсной томографии .....	161
Раджабов А. Г. Разработка системы поддержки принятия решений для диагностики патологий сердечно-сосудистой системы по рентгеновским изображениям грудной клетки с использованием аугментации методом генерации искусственных изображений .....	163
Ревуцкая О. Л., Фрисман Е. Я. Эволюционная динамика двуполой популяции с неперекрывающимися поколениями.....	166
Савинов П. А., Бахтин К. Е., Киличов У. Ш. Оптимизационный метод решения задач маскировки для 2D модели электропроводности .....	169
Салмиянов В. О., Масловская А. Г., Ильин А. В. Мультифрактальная параметризация растровых изображений компьютерной томографии легких .....	172
Саруханян С. К., Масловская А. Г. Вариация решеток клеточных автоматов для моделирования роста биопленок в условиях лимитирования по субстрату.....	175
Селезнев Т. Э., Ковтанюк А. Е. Обратная задача для модели переноса кислорода в мозге ..	178
Смагин С. И., Манжула И. С. О моделировании физических процессов в наножидкостном солнечном коллекторе .....	181
Соболева О. В. Исследование численного алгоритма восстановления неизвестного коэффициента диффузии для стационарной модели переноса вещества .....	184
Спивак Ю. Э. Численная оптимизация в 3D задачах проектирования многослойных магнитных оболочек .....	187
Станкевич Н. В. Бистабильные модели типа Ходжкина-Хаксли как элементы сетей с патологическим поведением.....	190
Степанова И. В. Эволюция конвективного течения в неоднородном нагреваемом горизонтальном канале.....	192
Степович М. А., Туртин Д. В., Калманович В. В., Картанов А. А. О некоторых аспектах математического моделирования и качественных оценках процессов диффузии в электронно-зондовых технологиях полупроводниковых материалов.....	195
Столяров В. Я., Гордин С. А. Математические методы и алгоритмы подготовки компьютерного изображения при распознавании текстов, выполненных лазерной гравировкой .....	198
Судаков В. А., Сивакова Т. В. Применение систем поддержки принятия врачебных решений для снижения рисков в полифармакотерапии.....	201
Тахиров Ж. О. О существовании классических решений модели агрегации с логистическими источниками.....	204
Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. О математическом моделировании эредитарного переноса радона в подпочвенном воздухе по данным мониторинга на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне.....	207
Твёрдый Д. А., Паровик Р. И. Об эффективности параллельных алгоритмов численного решения некоторых модельных задач дробной динамики .....	210
Трефилов И. В., Лобанова Э. А., Овчинников П. А., Стронгин В. С., Шевченко Ю. А. Фазовый переход и кроссоверы системы Изинг-подобных диполей на каирской решетке...	213

Ухов П. А., Булакина М. Б., Крылов С. С. Формирование набора данных (датасета) для изучения паводковых явлений на реке Амур .....	216
Чесноков М. А., Наливайко И. Н., Нефедев К. В. Исследование низкоэнергетических состояний спиновых стекол .....	219
Чупров С. В. Теоретико-информационный анализ модели самоорганизации индустриальной системы .....	222
Шапкин А. С., Потапов К. О. Алгоритм оценки полного электронного содержания ионосферы.....	225
Шарый С. П. Интервальные системы уравнений и их решение .....	229
Шевкун И. А., Масловская А. Г. Характеристики геометрических паттернов для реакционно-диффузионной модели роста бактерий при культивировании на питательных средах .....	232
Шуай И., Масловская А. Г. Реакционно-диффузионно-конвективная модель процесса коммуникации бактерий в микрофлюидных системах .....	235
Юзвук А. А., Кузнецов К. С. Решение сингулярно возмущенных задач при помощи нейронных сетей .....	238

## КАК ИСПОЛЬЗОВАТЬ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ ОСМЫСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

А. А. Абдуллина, В. Э. Зинуров

*Казанский государственный энергетический университет, Казань*

**Аннотация.** Статья описывает ключевые аспекты интеллектуального анализа данных (ИАД) и его значимость в современном бизнесе для принятия более точных решений. Подробно рассматриваются преимущества ИАД как инструмента прогнозирования и принятия соответствующих решений на основе автоматического анализа.

**Ключевые слова:** интеллектуальный анализ данных, прогнозирование, решение, рынок

## HOW TO USE DATA MINING TO MAKE MEANINGFUL DECISIONS

A. A. Abdullina, V. E. Zinurov

Kazan State Power Engineering University, Kazan

**Abstract.** The article describes the key aspects of data mining (IAD) and its importance in modern business for making more accurate decisions. The advantages of IAD as a tool for forecasting and making appropriate decisions based on automatic analysis are considered in detail.

**Key words:** data mining, forecasting, solution, market

В современном бизнесе большое значение придается анализу данных, потому что он позволяет оценить ситуацию и принять решения на основе точной информации, что повышает эффективность работы компании. При этом использование классических методов обработки данных, таких как статистический анализ и отчетность, уже не обеспечивает достаточный уровень точности анализа. Таким образом, интеллектуальный анализ данных (ИАД) становится все более популярным инструментом в бизнесе, позволяющим получить более качественную информацию и осуществить более глубокий анализ данных.

Интеллектуальный анализ данных – это процесс получения знаний и информации из большого объема данных. Он представляет собой комплексное исследование данных, которое включает в себя применение методов машинного обучения, статистического анализа и экспертных систем для автоматизации процессов принятия решений и визуализации данных. Одним из основных преимуществ ИАД является способность прогнозировать результаты на основе анализа больших объемов данных. Использование такой технологии позволяет предсказывать будущие изменения рынка и анализировать изменения в поведении потребителей, что позволяет компаниям принимать более осмысленные и точные решения. Еще одним важным аспектом ИАД является его способность обрабатывать различные типы данных в режиме реального времени. Современные системы анализа данных могут охватывать не только структурированные данные, но и неструктурированные данные, такие как тексты, изображения, аудио- и видеофайлы. Это позволяет компаниям более полно понимать потребности своих клиентов и корректировать свои предложения в соответствии с этими потребностями.

Интеллектуальный анализ данных может использоваться в различных областях бизнеса, таких как маркетинг, продажи, производство и финансы. Например, в маркетинге ИАД может использоваться для определения профиля потребителя, прогнозирования спроса на продукцию и принятия решений об оптимальной цене и маркетинговой стратегии. В



производстве ИАД может использоваться для оптимизации производственных процессов и выявления неисправностей в оборудовании.

Какими бы ни были применяемые методы ИАД, при работе с данными необходимо соблюдать правила обработки и защиты конфиденциальной информации. Существует ряд правил, которые должны быть соблюдены при использовании ИАД для обработки данных, в том числе соблюдение законодательства в области защиты персональных данных, обработка данных только на основе законных договоров и договоренностей с субъектами.

В заключение, интеллектуальный анализ данных является мощным инструментом в бизнесе и может помочь компаниям принимать более осмысленные и точные решения. Он может использоваться в различных областях бизнеса, но для работы с данными необходимо соблюдать правила обработки и защиты данных. Внедрение ИАД помогает бизнесу повысить продуктивность и улучшить реализацию своих стратегий. В перспективе планируется применить ИАД для определения наиболее эффективных конструктивных и технологических параметров при проведении дополнительных исследований по повышению эффективности сепараторов и классификаторов [1, 2]. Ожидается, что ИАД позволит выявить неочевидные зависимости между комплексом параметров, полученных в работах [3–5], что позволит усовершенствовать аппараты.

### **Библиографический список**

1. Зинуров, В. Э. Численное моделирование газодинамики в центробежном классификаторе / В. Э. Зинуров, А. В. Дмитриев, Н. Ф. Сахибгареев, Д. Н. Латыпов, М. Г. Гарипов // Вестник технологического университета. – 2021. – Т. 24. – № 12. – С. 128–132.
2. Галимова, А. Р. Сепарационное устройство с соосно расположенными трубами для разделения водонефтяных эмульсий / А. Р. Галимова, В. Э. Зинуров, А. В. Дмитриев, В. В. Харьков // Вестник технологического университета. – 2021. – Т. 24. – № 3. – С. 50–54.
3. Зинуров, В. Э. Численное моделирование процесса улавливания мелкодисперсных капель формальдегида в сепарационном устройстве с двутавровыми элементами / В. Э. Зинуров, А. В. Дмитриев, А. Р. Галимова, Г. Х. Гумерова // Вестник технологического университета. – 2020. – Т. 23. – № 11. – С. 82–86.
4. Зинуров, В. Э. Промышленные испытания фракционирования сыпучего материала в мультивихревом классификаторе-сепараторе / В. Э. Зинуров, А. В. Дмитриев, О. С. Дмитриева, К. С. Моисеева // Вестник Технологического университета. – 2022. – Т. 25. – № 4. – С. 58–63. – DOI 10.55421/1998-7072\_2022\_25\_4\_58.
5. Dmitriev, A. V. Collecting of finely dispersed particles by means of a separator with the arc-shaped elements / A. V. Dmitriev, V. E. Zinurov, O. S. Dmitrieva // E3S Web of Conferences. – EDP Sciences. – 2019. – V. 126. – P. 00007. – DOI: 10.1051/e3sconf/201912600007.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Стипендии Президента РФ СП3577.2022.1.

### **Информация об авторах**

**Абдуллина Азалия Айратовна** – студент 2-го курса, Казанский государственный университет. E-mail: azalkaabdullina69826@gmail.com.

**Зинуров Вадим Эдуардович** – аспирант, Казанский государственный университет. E-mail: vadd\_93@mail.ru.

## МАССОВАЯ ОЦЕНКА ЖИЛОЙ НЕДВИЖИМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРВИЧНОЙ ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ ГОРОДА

А. Л. Абрамов, П. А. Пугач

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** В работе рассмотрена проблема оценки стоимости жилой недвижимости, зависящей от удалённости объектов инфраструктуры и районов города, на примере моногорода Детройт (США, штат Мичиган). Для оценки стоимости использовался теоретико-графовый подход, взвешенная первичная графовая модель города (ПГМГ), которая была получена с помощью открытой картографической базы данных OSM и библиотеки OSMnx. С помощью ПГМГ были получены уникальные типы объектов инфраструктуры города на примере Детройта, данные об удалённости которых легли в основу факторных переменных регрессионной модели. С ее помощью была дана оценка жилой недвижимости. Этот подход может быть использован для массовой оценки объектов недвижимости в других городах.

**Ключевые слова:** первичная графовая модель, ценовое моделирование; массовая оценка; недвижимость

## MASS ASSESSMENT OF RESIDENTIAL REAL ESTATE USING THE PRIMARY GRAPH MODEL OF THE CITY

A. L. Abramov, P. A. Pugach

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

**Abstract.** The paper considers the problem of estimating the cost of residential real estate, depending on the remoteness of infrastructure facilities and city districts, using the example of Detroit (USA, Michigan). To estimate the cost, a graph-theoretic approach was used, a weighted primary city graph model (PGMG), which was obtained using the OSM – open cartographic database and the OSMnx library. With the help of PGMG, unique types of Detroit infrastructure facilities were obtained, the data on the remoteness of which formed the basis of the factor variables of the regression model. With the help of which an assessment of residential real estate in the city of Detroit was given. This approach can be used for mass appraisal of properties in other cities.

**Key words:** primary graph model, price modeling; mass valuation; real estate

Проблема постоянной переоценки стоимости объектов недвижимости характерна для многих городов, как в мире, так и в России. Поскольку стоимость непосредственно влияет на размер налога на имущество, важно, чтобы она была определена корректно, на основе актуальных сведений, которые включают в себя не только индивидуальные характеристики объекта недвижимости, но и факторы внешней среды (влияние инфраструктуры). Существуют разные подходы к оцениванию недвижимости, следует выделить эконометрические, и нейросетевые. Регрессионный анализ достаточно широко исследован [1-3], его основным недостатком является учёт влияния только внутренних параметров объектов недвижимости.

Практическое применение нейросетевых модели, связано с быстрым развитием технологий хранения и обработкой больших объёмов данных, в целом такой подход к оценке стоимости объектов недвижимости является достаточно успешным, но в нем недостаточна интерпретируемость результатов и параметров. В последние десятилетия существенно по-

высилась доступность информации, имеющей пространственную привязку в том числе, данных геоинформационных систем. Традиционные приёмы анализа статистических данных, как правило, не используют информацию об упорядоченности объектов. Геокодированные данные отражают расположение объектов внутри некоторой области или территории. В настоящее время, сформировалось научное направление, использующее статистику для анализа пространственных эффектов и взаимосвязей – пространственная эконометрика [4-6].

В реальных ситуациях экономического анализа территория города в существенной степени выступает как пространственная структура, подобные модели рассматриваются в теории сложных сетей [7]. В данной работе рассматривается зависимость стоимости объектов жилой недвижимости от их удалённости от инфраструктурных и социально значимых объектов с использованием теоретико-графового подхода, на примере оценки жилой недвижимости моногорода Детройт (США, штат Мичиган). Для решения задачи оценки объектов жилой недвижимости, рассмотрим взвешенную ПГМГ, где весом ребра является расстояние между перекрёстками, подробнее см. [8].

Пусть у нас есть координаты объектов жилой недвижимости  $x_i \in X$  и объектов инфраструктуры  $m_j \in M$ , ...,  $z_k \in Z$ , где каждый тип объекта инфраструктуры принадлежит некоторому непустому, конечному, попарно непересекающемуся множеству, соответственно  $\{M, ..., Z\}$ . Пусть  $d_{im_j}$  – расстояние от объекта жилой недвижимости  $x_i$  до объекта инфраструктуры  $m_j \in M$ , рассчитаем кратчайшее расстояние, вычисленное на ПГМГ, от объекта  $x_i$ , до элементов из множества  $M$ , по формуле:  $d_{im_j}^* = \min_j d_{im_j}$ , по аналогии рассчитываем показатели для каждого объекта жилой недвижимости и всех типов объектов инфраструктуры, в результате получаем вектор минимальных оценок  $(d_{im_j}^*, ..., d_{iz_k}^*)$ . Полученные оценки будем использовать в качестве факторных переменных множественного линейного уравнения регрессии. Пример размещения которых для выбранного объекта жилой недвижимости Детройта на ПГМГ приведён на рис. 1.



Рисунок 1 – Кратчайшие пути от инфраструктуры до заданного объекта жилой недвижимости

Совместное использование методов регрессионного анализа и описанного подхода помимо решения задачи оценки стоимости регрессии позволит выявить объекты инфраструктуры, которые вносят наибольший вклад в оценку стоимости жилой недвижимости. В качестве исходного массива факторных переменных были взяты данные об удалённости от объектов инфраструктуры города, содержащий 175 уникальных типов. После исключения мультиколлинеарности у нас остались 4 независимые факторные переменные. Построена модель множественной линейной регрессии, зависимости результативной переменной  $y$  –

стоимости квадратного фута объекта в долларах от его удалённости в километрах от 4 объектов инфраструктуры:  $x_1$  – культовых сооружений;  $x_2$  – автомоек;  $x_3$  – кафе и  $x_4$  – оборудованных мест для отдыха на природе:

$$y = 97.76 - 19.43x_1 + 25.23x_2 + 41.67x_3 - 28.11x_4.$$

Далее эта модель была улучшена за счёт включения качественных переменных, описывающих за его тип жилья и принадлежность к району. Полученная в итоге модель множественной регрессии имеет хорошие метрики качества, как на обучающей, так и на тестовой выборке,  $R_{train}^2 = 0.81$ ,  $R_{test}^2 = 0.79$ .

**Заключение.** В результате разработанного подхода и полученной с его помощью оценке стоимости недвижимости проведён системный анализ задачи джентрификации в Детройте, выявлены наиболее перспективные для реконструкции районы, с точки зрения средней стоимости 1 кв. фута жилой недвижимости. Этот подход может быть использован для массовой оценки объектов недвижимости в других городах.

### Библиографический список

1. Азнабаев, А. М. Математическая модель массовой оценки рынка жилой недвижимости: дис. на соиск. уч. ст. к. э. н. – Уфа, 2012.
2. Анисимова, И. Н. Учет разнотипных ценообразующих факторов в многомерных регрессионных моделях оценки недвижимости / И. Н. Анисимова, Н. П. Баринев, С. В. Грибовский // Вопросы оценки. – 2004. – № 2.
3. Эконометрика. Начальный курс: учебник / Я. Р. Магнус, П. К. Катыхов, А. А. Пересецкий – М. : Дело, 2004.
4. Anselin, L. Spatial econometrics: methods and models / L. Anselin // Dordrecht ; Boston : Kluwer Academic Publishers. – 1988. – P. 277.
5. Haining, R. Spatial data analysis: Theory and practice / R. Haining // Cambridge: Cambridge University Press. – 2004. – P. 432.
6. Schabenberger, O. Statistical methods for spatial data analysis / O. Schabenberger, C. A. Gotway // CRC Press. – 2005. – P. 506.
7. Abramov, A. L. Graph models of complex networks / A. L. Abramov, A. S. Velichko, A. K. Kozlovskaya, E. V. Drekkov, M. A. Anoshkina, M. A. Molochkova // The 32nd International Conference of the Jangjeon Mathematical Society, 17– 21 July, 2019, FEFU, Vladivostok, Russia: abstracts. – Vladivostok: Publishing House of the Far Eastern Federal University, 2019. – V. 76. – I. 6. – P. 5–8. – DOI: 10.24866/7444-4647-5.
8. Абрамов, А. Л. Графовые модели городов / А. Л. Абрамов, П. А. Пугач // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. – 2021. – № 6. – С. 3–7.

### Информация об авторах

**Абрамов Александр Львович** – канд. техн. наук, доцент, профессор департамента математики ИМКТ Дальневосточного федерального университета, научный руководитель Центра математических методов народнохозяйственного прогнозирования и программирования передовой инженерной школы и института математики и компьютерных наук Дальневосточного федерального университета. E-mail: abramov.al@dvfu.ru.

**Пугач Петр Андреевич** – инженер-исследователь департамента комплексных проектов передовой инженерной школы Дальневосточного федерального университета. E-mail: 679097@mail.ru.



## ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ 3D ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ МАСКИРОВКИ

Г. В. Алексеев<sup>1,2</sup>, А. В. Лобанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*  
<sup>2</sup>*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** Исследуются обратные задачи для трехмерной модели электростатики, возникающие при разработке технологий дизайна устройств маскировки. Разрабатывается математический аппарат их решения, основанный на оптимизационном методе решения обратных задач и использовании метода роя частиц. Устанавливаются важные свойства оптимальных решений, одним из которых является принцип bang-bang. Показывается, что спроектированные на основе разработанного алгоритма устройства обладают простотой технической реализации и наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств.

**Ключевые слова:** обратные задачи, модель электростатики, задача маскировки, оптимизационный метод, метод роя частиц

## APPLICATION OF OPTIMIZATION METHODS FOR NUMERICAL SOLUTION OF 3D PROBLEMS OF ELECTROSTATIC CLOAKING

G. V. Alekseev<sup>1,2</sup>, A. V. Lobanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Far Eastern Federal University, Vladivostok*  
<sup>2</sup>*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok*

**Abstract.** Inverse problems for a 3D model of electrostatics, which arise when developing technologies for designing cloaking devices, are studied. A mathematical technique for solving these problems is developed, based on the optimization method for solving inverse problems and using the particle swarm method. Important properties of optimal solutions are established, one of which is the bang-bang property. It is shown on the base of the computational experiments that devices designed using the developed algorithm have the simplicity of technical implementation and the highest performance in the class of devices under consideration.

**Key words:** inverse problems, electrostatics model, cloaking problem, optimization method, partial swarm optimization method

В начале этого столетия получило интенсивное развитие новое направление в электромагнетизме, связанное с разработкой технологий дизайна устройств для электрической или магнитной маскировки материальных тел. Первые работы в этой области посвящены исследованию задач маскировки с использованием метода оптических преобразований, развитого в [1], или метода подавления рассеяния, предложенного в [2]. Следует отметить, что полученные с помощью этих методов решения играют важную теоретическую роль, но они обладают недостатком, а именно трудностью технической реализации, поскольку полученные решения отвечают оболочкам, заполненным анизотропными средами. С учетом того, что задачи маскировки, как и задачи дизайна, относятся к обратным задачам, некоторые группы ученых стали применять для решения задач дизайна маскировочных оболочек методы оптимизации.

В соответствии с методом оптимизации обратные задачи сводятся к экстремальным задачам минимизации специальных функционалов качества, которые называются функционалами Тихонова [3]. Для минимизации таких функционалов обычно используют

итерационные методы и, в частности, градиентные методы. Однако следует отметить, что в случае коэффициентных обратных задач функционалы Тихонова невыпуклы. Хорошо известно, что для таких функционалов градиентные методы могут сходиться к локальному минимуму, который может сильно отличаться от глобального минимума.

Анализ обратных экстремальных задач, к которым обратные задачи сводятся в результате применения метода оптимизации, позволяет установить важные новые свойства, присущие именно решениям экстремальных задач. Одним из таких свойств является так называемое “bang-bang” свойство (см. [4–7]). Как будет показано, использование этого свойства позволяет получать решения рассматриваемых задач, имеющие простую техническую реализацию. Кроме того, использование “bang-bang” свойства позволяет значительно упростить разрабатываемые нами численные алгоритмы решения задач дизайна маскирующих оболочек, экранов и других специальных устройств.

Основное внимание в докладе уделяется рассмотрению обратных задач для трехмерной модели электростатики, возникающих при разработке технологий дизайна маскирующих и экранирующих устройств в виде оболочек  $(\Omega, \varepsilon)$ , состоящих из конечного числа концентрических сферических слоев  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, M}$  (см. рис. 1), каждый из которых заполнен однородной анизотропной или изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

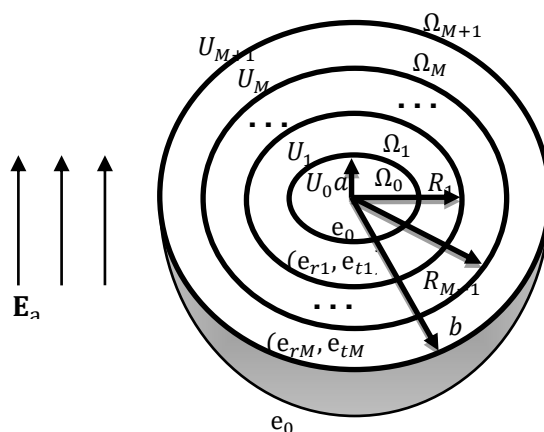


Рисунок 1 – Схематическое изображение внешне приложенного электрического поля  $E_a$  и многослойной сферической оболочки  $(\Omega, \varepsilon)$ , находящейся в свободном пространстве

Для решения указанных задач разрабатывается математическая технология, основанная на использовании оптимизационного метода исследования обратных задач. В качестве минимизируемых функционалов качества выбираются величины, обратные к маскирующим или экранирующим характеристикам проектируемых оболочек. Роль управляющих параметров играют диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_m$  сферических слоев  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, M}$  составляющих искомую сферическую оболочку. Для нахождения искомых управлений предлагается эффективный численный алгоритм, основанный на методе роя частиц (МРЧ) [8]. С использованием разработанного алгоритма проводится серия вычислительных экспериментов по решению задач дизайна экранирующих и маскирующих устройств в широком диапазоне изменения основных параметров, входящих в используемую модель электростатики.

Результаты проведенного оптимизационного анализа показывают, что высокие характеристики проектируемых средств маскировки и экранирования могут быть достигнуты при использовании как однослойных анизотропных оболочек с высоким коэффициентом

анизотропии, так и многослойных изотропных оболочек, состоящих из нескольких изотропных сферических слоев  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , каждый из которых заполнен однородной средой с некоторой постоянной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_m > 0$ . Значения указанных диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_m$  всех слоев находятся с помощью разработанного численного алгоритма на основе МРЧ.

В случае изотропных оболочек построенные оптимальные решения  $\mathbf{e}^{opt} \equiv (\varepsilon_1^{opt}, \varepsilon_2^{opt}, \dots, \varepsilon_M^{opt})$  обладают свойством “bang-bang”. Согласно этому свойству для любого числа слоев  $M$  каждая компонента  $\varepsilon_m^{opt}$  оптимального решения  $\mathbf{e}^{opt}$  (кроме последней компоненты  $\varepsilon_M^{opt}$  в задаче маскировки) принимает одно из двух значений  $\varepsilon_{\min}$  и  $\varepsilon_{\max}$ , являющихся границами множества управлений. Это позволяет сделать важный вывод о том, что разработанный оптимизационный алгоритм позволяет находить оптимальные решения задач экранирования и маскировки, которым при соответствующем выборе множества управлений отвечают высокоэффективные экранирующие и маскирующие оболочки, обладающие простотой технической реализации.

### Библиографический список

1. Pendry, J. B. Controlling electromagnetic fields / J. B. Pendry, D. Shurig, D. R. Smith // Science. – 2006. – V. 312. – P. 1780–1782. – DOI: 10.1126/science.1125907.
2. Alu, A. Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings / A. Alu, N. Engheta // Physical Review E. – 2005. – V. 72. – 016623. – DOI: 10.1103/PhysRevE.72.016623.
3. Solutions of Ill-Posed Problems / A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin. – Washington: V. H. Winston & Sons, 1977. – 258 p. – ISBN: 978-0-4709-9124-4.
4. Алексеев, Г. В. Оптимизационный анализ задач электростатической маскировки / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов // Сиб. журн. инд. матем. – 2020. – Т. 23. – № 4(84). – С. 5–17. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.401.
5. Алексеев, Г. В. Численный анализ трехмерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 2021. – Т. 61. – № 2. – С. 224–238. – DOI: 10.31857/S0044466921020034.
6. Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе / Г. В. Алексеев. – Владивосток: Дальнаука, 2016. – 224 с. – ISBN: 978-5-80441630-1.
7. Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел / Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 328 с. – ISBN: 978-5-9221-1919-1.
8. Poli, R. Particle swarm optimization: an overview / R. Poli, J. Kennedy T. Blackwell // Swarm Intell. – 2007. – V. 1. – P. 33–57. – DOI: 10.1007/s11721-007-0002-0.

### Благодарности

Работа выполнена в ДЦМИ при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-946 от 16.02.2023 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

### Информация об авторах

**Алексеев Геннадий Валентинович** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор Института математики и компьютерных технологий Дальневосточного федерального университета, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: alekseev@iam.dvo.ru.

**Лобанов Алексей Викторович** – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: lobanov@iam.dvo.ru.

## ЧИСЛЕННОЕ АДАПТИРОВАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИБРЕЖНЫХ ЗОН

Е. В. Амосова

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** Рассматривается динамика прибрежной зоны морской акватории в заданной геометрии. Математическая модель, описывающая гидродинамический процесс, учитывает анизотропность, неоднородность, турбулентный обмен, ветровые напряжения и трение о дно, сложный рельеф дна и береговой линии. На основе эйлеровой конечно-элементной аппроксимации дифференциальных уравнений составлен численный алгоритм, учитывающий неявную дискретизацию по времени со вторым порядком точности. В прикладном мультифизическом программном пакете FreeFem++ написан код для расчёта гидродинамических характеристик прибрежной акватории. Уравнение свободной поверхности воды заменяется сингулярно-возмущенной задачей. Для решения регуляризованной задачи на каждом временном слое происходит адаптация сетки вокруг численного решения с заданными параметрами управления.

**Ключевые слова:** уравнения Рейнольдса, метод конечных элементов, FreeFem++

## NUMERICAL ADAPTED SIMULATION OF HYDRODYNAMIC PROCESSES OF COASTAL ZONES

E. V. Amosova

*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok  
Far Eastern Federal University, Vladivostok*

**Abstract.** The dynamics of the coastal zone of the marine area is considered. The mathematical model describing the hydrodynamic process takes into account anisotropy, heterogeneity, turbulent exchange, wind stresses and friction on the bottom, complex topography of the bottom and coastline. On the basis of the Euler finite element approximation of differential equations, a numerical algorithm was developed that takes into account implicit time discretization with the second order of accuracy. In the applied multiphysics software package FreeFem++, a code was written for calculating the hydrodynamic characteristics of coastal waters. The free water surface equation is replaced by a singularly perturbed problem. To solve the regularized problem, the mesh is adapted around the numerical solution with given control parameters at each time layer.

**Key words:** Reynolds equations, finite element method, FreeFem++

Рассматривается вопрос численной реализации трехмерных нестационарных уравнений Рейнольдса динамики прибрежных вод, основанных на гидростатическом приближении [1]. Изучение гидродинамических и потоковых процессов происходящих на акватории проектирования имеет большое прикладное значение для решения конкретных инженерных и проектно-изыскательских задач: сезонного проектирования судоходных трасс, проектирования береговых сооружений, водозаборных станций, дамб, запруд и берегоукрепительных сооружений, для прогнозирования возможных последствий негативного воздействия указанной деятельности на состояние водных биоресурсов. Построение математических моделей, позволяющих исследовать гидродинамические процессы для дальнейшего расчета размера вреда водным биоресурсам, и затрат на восстановление их нарушаемого состояния при произ-



водстве строительных работ в акватории, и построение устойчивых вычислительных алгоритмов расчета в областях с произвольной геометрией акватории, является в настоящее время актуальной и практически значимой задачей. Современное состояние применения вычислительных расчетов модели океанов описано в книге [2]. Система уравнений, описывающая движения воды в прибрежной акватории может быть записана как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi + B\varphi = F, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad (1)$$

где  $\varphi = \{u, v, w, T, S, \zeta\}$  – вектор состояния,  $A$  – трехмерный оператор адвекции (переноса), оператор  $B$  описывает горизонтальную и вертикальную диффузию, пограничное трение о дно, силы Кориолиса, топографию дна морской акватории. Вектор правых частей описывает источники и стоки соответствующей переменной, радиацию, испарение, ветровые нагрузки. Для решения системы (1) используется конечно-элементный метод аппроксимации уравнений, который реализован с помощью программного обеспечения с открытым исходным кодом FreeFem++. Дискретизация пространства основана на конечных элементах Тейлора-Худа, аппроксимирующих неизвестные величины кусочно-квадратичными полиномами Лагранжа второй степени. Для интегрирования по времени используется метод Гира второго порядка. Моделирование всех уравнений системы (1) проводится по неявной схеме. Для нелинейных слагаемых в граничных условиях, и слагаемых, описывающих конвективный перенос, применяется линеаризованное неявное представление, учитывающее скорость изменения состояния системы на предыдущем временном шаге, по формуле

$$A(\varphi^{m+1}) \approx A(\varphi^m) + A'_{\varphi}(\varphi^m)(\varphi^{m+1} - \varphi^m), \quad m = 1, 2, \dots$$

Линеаризованная модель, характеризуется тем, что на каждом временном слое решение находится из линейной вариационной задачи. Отметим, что система уравнений (1) состоит из разных типов дифференциальных уравнений в частных производных. Для приведения системы к единому типу, дифференциальное уравнение гиперболического типа заменяется уравнением параболического типа с параметром регуляризации  $\varepsilon > 0$  вместе с дополнительным краевым условием на части границы области. Алгоритм нахождения решения сингулярной задачи для достаточно малого параметра регуляризации  $\varepsilon = 0.001$  на каждом временном шаге построен на применении адаптации сетки вокруг численного решения с управляющими параметрами такими как, ошибка интерполяции внутри области, ошибка интерполяции на границе области, максимальный размер конечного элемента. Повышение пространственного разрешения расчетной сетки делает модель способной воспроизводить адекватную картину гидродинамического процесса, повышая достоверность расчета.

### Библиографический список

1. Географическая гидродинамика в 2-х т. / Дж. Педлоски. Пер. с англ. Г. М. Резника, Т. Б. Цыбаневой. Т. 1. – М.: Изд-во Мир, 1984. – 398 с.
2. Модели глобальной атмосферы и Мирового океана. Алгоритмы и суперкомпьютерные технологии / М. А. Толстых, Р. А. Ибраев, Е. В. Володин, К. В. Калмыков, А. В. Шляева, В. Г. Мизяк, Р. Н. Хабеев. – М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013. – 144с. – ISBN: 978-5-211-06481-2.

### Информация об авторах

**Амосова Елена Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор департамента математического и компьютерного моделирования Института математики и компьютерных технологий, н.с. Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: el\_amosova@mail.ru.

## ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е. В. Амосова<sup>1,2</sup>, А. Д. Сапожников<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

<sup>2</sup>*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** Рассматриваются два метода изогеометрической интерполяции поверхности, когда исходные данные предполагаются определенными в виде некоторого семейства поточечно заданных непересекающихся криволинейных сечений трехмерного тела и в случае, когда требуется восстановить интерполяционную поверхность по заданному набору точек наблюдений в трехмерном пространстве. Определение сплайна как решение дифференциального уравнения теории упругости позволяет ввести в структуру сплайна параметры формы, с помощью которых интерполяционная функция наследует свойства монотонности, выпуклости, постоянства исходных данных. А аналогия восстанавливающей поверхности с уравнением изгиба жесткой пластины приводит к автоматическому определению параметров формы.

**Ключевые слова:** интерполяция сплайнами, полиномиальные сплайны, математическое моделирование, метод конечных элементов, FreeFem++

## VARIATIONAL METHODS FOR ISOGEOMETRIC INTERPOLATION OF A TWO-DIMENSIONAL SURFACE

E. V. Amosova<sup>1,2</sup>, A. D. Sapozhnikov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok*

<sup>2</sup>*Far Eastern Federal University, Vladivostok*

**Abstract.** Two methods of isogeometric surface interpolation are considered, when the initial data are assumed to be defined as a certain family of pointwise given non-intersecting curvilinear sections of a three-dimensional body and in the case when it is required to restore the interpolation surface from a given set of observation points in three-dimensional space. The definition of a spline as a solution to a differential equation of the theory of elasticity allows one to introduce shape parameters into the spline structure, with the help of which the interpolation function inherits the properties of monotonicity, convexity, and constancy of the initial data. And the analogy of the restoring surface with the rigid plate bending equation leads to automatic determination of the shape parameters.

**Key words:** spline interpolation, polynomial splines, mathematical modeling, finite element method, FreeFem++

Во многих практических задачах требуется интерполировать дискретные данные с сохранением таких геометрических характеристик как положительность, монотонность, выпуклость. Классические подходы интерполирования, основанные на использовании кусочно-гладких функций [1] или применении вариационных методов [2] не дают желаемых результатов. В книге [3] описан метод интерполирования гиперболическими сплайнами с параметрами натяжения. Интерполяционный сплайн ищется как решение многоточечной дифференциальной краевой задачи. Двумерный сплайн определяется как тензорное произведение одномерных сплайнов. Задача нахождения сплайна, обладающего достаточной гладкостью и хорошо адаптирующегося под поведение исходных данных, называется задачей изогеомет-

рической интерполяции. Параметры натяжения контролируют адаптационную способность сплайна подстроиться под исходные данные. В [3] представлен большой обзор по проблеме интерполирования сплайнами.

При решении задачи изогеометрической интерполяции конечно-разностным методом [3] приходится вычислять большое число одномерных интерполяционных гиперболических сплайнов с натяжением. Кроме того, исходные данные должны задаваться в узлах конечно-разностной сетки. Предлагаемые алгоритмы определения двумерного интерполяционного сплайна с сохранением формы данных лишены этих двух существенных недостатков.

В данной работе предложены алгоритмы интерполирования поверхности, основанные на вариационных принципах, предполагая, что исходные данные определены в виде набора точно заданных непересекающихся криволинейных сечений поверхности или в виде набора заданного множества точек области. Используя одномерную интерполяцию, основанную на решении дифференциальных многоточечных задач с параметрами натяжения, по заданным данным строятся гладкие кривые, разделяющие область на регионы. В этом случае двумерный сплайн строится как решение дифференциальных краевых задач четвертого порядка, в областях с криволинейными границами. На границах регионов выполняются условия равенства производных искомых функций до второго порядка и выполняются условия интерполяции сплайна, так что, полученный интерполяционный сплайн образует непрерывно дифференцируемую двумерную функцию. В случае задания множества точек наблюдений интерполирующая функция находится из условия минимума специального квадратичного функционала, обеспечивающего монотонность и гладкость аппроксимирующей функции. Отметим, что вид дифференциального уравнения в обоих случаях можно сопоставить с видом уравнения из теории упругости для описания прогиба упругой тонкой пластины под воздействием силовой нагрузки на поверхность пластины. Алгоритм нахождения решения дифференциальных краевых задач проводится методом конечных элементов с применением элементов Морли на области. В качестве функции натяжения выбирается специально построенная кусочно-непрерывная функция моделирующая модуль упругости пластины из гипотетического материала, которая имеет аналог коэффициентов натяжения. Численно-аналитическое решение строится в программном комплексе FreeFem++.

### **Библиографический список**

1. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972.
2. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания / В. В. Вершинин, Ю. С. Завьялов, Н. Н. Павлов. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
3. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами / Б. И. Квасов. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 416 с.

### **Информация об авторах**

**Амосова Елена Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор департамента математического и компьютерного моделирования Института математики и компьютерных технологий, н.с. Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: el\_amosova@mail.ru.

**Сапожников Артем Дмитриевич** – студент 2-го курса магистратуры, Отделение морской техники и транспорта, Политехнический институт, ДВФУ. E-mail: sapozhnikov.ad@students.dvfu.ru.

## INTVALPY - БИБЛИОТЕКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ PYTHON

А. С. Андросов, С. П. Шарый

*Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,  
Новосибирск*

**Аннотация.** В статье рассматривается библиотека IntvalPy, реализующая интервальные вычисления на языке Python. В отличие от других существующих интервальных библиотек IntvalPy предоставляет возможность работы как с классической интервальной арифметикой, так и с полной интервальной арифметикой Каухера. Кроме того, библиотека была разработана с учётом стандарта IEEE 1788-2015 на интервальные вычисления на ЭВМ, что гарантирует высокую точность результатов, а также совместимость с другими программными продуктами. Верхнеуровневая функциональность библиотеки IntvalPy реализует новейшие методы для распознавания и оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений, вычисления их формальных решений, а также визуализации множеств решений интервальных уравнений и систем уравнений. В качестве примера приложения библиотеки была решена практически важная задача оценивания параметров электрохимического процесса формирования рыхлых осадков порошков металла. Кроме того, были проведены численные и качественные сравнения с другими интервальными библиотеками для демонстрации функциональных возможностей и оптимальности реализованных интервальных классов.

**Ключевые слова:** интервальный анализ, библиотека интервальных вычислений, Python, неточные данные, интервальные системы уравнений, визуализация

## INTVALPY - A PYTHON INTERVAL COMPUTATION LIBRARY

A. S. Androsov, S. P. Shary

Federal research central for information and computational technologies, Novosibirsk

**Abstract.** The article presents the IntvalPy library, which implements interval computations in Python. Unlike other existing interval libraries, IntvalPy provides the ability to work with both classical interval arithmetic and complete Kaucher interval arithmetic. In addition, the library was developed taking into account the IEEE 1788-2015 standard for interval arithmetic on digital computers, which guarantees high accuracy of the results and compatibility with the other existing software products. The top-level functionality of the IntvalPy library implements the state-of-the-art methods for recognizing and estimating solution sets for interval linear systems of equations, computing their formal solutions, and visualizing solution sets for interval equations and systems of equations. As an example of the library application, we solve the practically important problem of estimating the parameters of the electrochemical process of the formation of loose metal powder precipitates. In addition, numerical computation was carried out, as well as qualitative comparisons with other interval libraries to demonstrate the functionality and optimality of implemented interval classes.

**Key words:** interval analysis, interval computing library, Python, inaccurate data, interval systems of equations, visualization

Настоящая работа посвящена созданию библиотеки программ на языке Python, реализующей интервальные вычисления и численные методы интервального анализа для решения ряда стандартных математических задач. Это современные методы для определения суще-



ствования решений как квадратных, так и переопределенных интервальных систем линейных алгебраических уравнений, вычисление внешних и внутренних оценок множеств решений, а также визуализации множеств решений интервальных уравнений и систем уравнений.

Мотивацией для данной работы послужило то, что среди большого количества программных модулей, реализованных к настоящему моменту для Python (например, [6]), отсутствуют высокоуровневые интервальные средства, необходимые для решения таких практически важных задач, как распознавание разрешимости интервальных систем уравнений, оценивание и визуализация их множеств решений и т.п (см. [1, 2, 3, 5]). Другой ключевой мотивацией нашей работы было то, что в большинстве созданных интервальных библиотек для Python отсутствует возможность работать в интервальных арифметиках, отличных от классической. Но классическая интервальная арифметика не имеет обратных элементов относительно основных арифметических операций и у нее плохие порядковые свойства. Таким образом, порой необходимо работать в полной интервальной арифметике или арифметике Каухера. Все вышеперечисленные соображения послужили причиной для создания указанной библиотеки IntvalPy (см. [8]).

При создании данного программного модуля мы руководствовались некоторыми основными требованиями. Ниже, в порядке убывания значимости, указаны наиболее приоритетные условия:

1) Библиотека должна быть проста в использовании, а написанный код – читаемым и понятным. Хорошо спроектированный модуль, построенный в соответствии с ясной и продуманной структурой, будет проще для изучения и использования. Вряд ли пользователи будут разбираться с беспорядочной структурой, даже если программный инструмент наиболее современен.

2) Библиотека должна удовлетворять общепринятым стандартам – IEEE 754-2008 для арифметики с плавающей точкой на ЭВМ и IEEE 1788-2015 для интервальных вычислений на ЭВМ (см. [4]). По умолчанию пользователь работает в режиме повышенной точности для концов интервалов, в котором количество знаков после запятой – варьируемая величина. Но при желании, если позволяет постановка задачи, пользователь может перейти в режим округления к ближайшему четному числу, что существенно сократит скорость выполнения алгоритмов.

3) Библиотека должна обеспечивать высокую производительность. Если решение задач полиномиальной сложности будет требовать изрядного количества времени, то вряд ли подобную функциональность можно назвать полезной.

4) Библиотека должна быть кроссплатформенной.<sup>1</sup>

5) Библиотека должна обеспечивать возможность работы в разных интервальных арифметиках (классическая, Каухера, Кэхэна и т.д.). Также в случае, если арифметики совместимы друг с другом, то система должна автоматически переходить от одной к другой.

6) Библиотека должна быть гибкой к изменениям и обеспечивать возможность расширения функциональности. Архитектура библиотеки должна позволять вносить изменения как на низкоуровневой функциональности, так и на верхнеуровневых интервальных методах (решатели уравнений, визуализация множеств решений и т.д.).

При проведении качественного анализа, представленного в табл. 1, было проведено сравнение возможностей, которые предоставляют другие интервальные библиотеки. В частности, рассматривались такие аспекты, как возможность работы с различными интервальными арифметиками, возможность выполнения матричных операций, наличие готовых инструментов для визуализации решений, наличие встроенных процедур для вычисления внешних и/или внутренних оценок параметров линейных систем, нахождение решений уравнений, а также возможность решения задач оптимизации.

---

<sup>1</sup> Отметим, что в отличие от других интервальных библиотек, написанных на языке Python, IntvalPy кроссплатформенна, и это является одним из ее главных достоинств.

Таблица 1 – Качественное сравнение интервальных библиотек

Библиотека	Арифм.	Мат. операции	Визуал.	Оценка парам.	Решение уравнений	Оптим.
IntvalPy	+	+	+	+	+	+
PyInterval	+	–	–	–	+	–
PyIbex	–	+	+	–	+	+
Octave <sup>2</sup>	–	+	–	+	+	–
WM <sup>3</sup>	+	+	–	+	–	–
JInterval	+	+	+	+	+	+
JI <sup>4</sup>	–	+	+	–	+	+
IntLab	+	+	–	+	+	+

Таким образом, в работе были изложены особенности разработанной библиотеки IntvalPy, главные идеи, положенные в ее основу, а также ее архитектура и реализация. Объяснены преимущества и достоинства библиотеки, в число которых входят востребованные сегодня кроссплатформенность, скорость вычислений и наиболее современные алгоритмы.

### Библиографический список

1. Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. – Новосибирск: XYZ, 2022. – 654 с.
2. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа / Э. Хансен, Дж. У. Уолстер. – Институт компьютерных исследований. – М., 2012. – 516 с.
3. Interval methods for systems of equations / A. Neumaier. – Cambridge. – New York, 1990. – 270 p.
4. Kearfott, R. B. Standardized notation in interval analysis / R. B. Kearfott, M. Nakao, A. Neumaier, S. M. Rump et al // Reliable Computing. – 2010. – V. 15. – № 1. – P. 7–13.
5. Стецюк, П. И. Субградиентные методы ralg5 и ralg4 для минимизации овражных выпуклых функций / П. И. Стецюк // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22. – С. 127–149.
6. Taschini, S. Interval Arithmetic: Python Implementation and Applications / S. Taschini // Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy 2008). – 2008. – P. 16–22.
7. Rump, S. M. Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic / S. M. Rump // Acta Numerica. – 2010. – V. 19. – P. 287–449.
8. Андросов, А. С., Шарый, С. П. Библиотека IntvalPy. Программный репозиторий // URL: <https://github.com/AndrosovAS/intvalpy>.

### Информация об авторах

**Андросов Артем Станиславович** – аспирант 1-го года обучения, ФИЦ ИВТ. E-mail: [artem.androsov@gmail.com](mailto:artem.androsov@gmail.com).

**Шарый Сергей Петрович** – д-р физ.-мат. наук, профессор, в.н.с. Института ФИЦ ИВТ. E-mail: [shary@ict.nsc.ru](mailto:shary@ict.nsc.ru).

<sup>2</sup> Подразумевается интервальная библиотека на свободно распространяемой программной системе GNU Octave.

<sup>3</sup> Интервальные возможности проприетарной системы Wolfram Mathematica.

<sup>4</sup> JuliaIntervals.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНЦИИ ЗА КЭШ В МНОГОЯДЕРНОМ ПРОЦЕССОРЕ

И. Л. Артемьева, А. Е. Чусова, А. А. Чусов

*Департамент программной инженерии и искусственного интеллекта ДВФУ, Владивосток*

**Аннотация.** В статье исследуется влияние кэша центрального процессора на оперативность многопоточных вычислений. Кэш рассматривается как разделяемый ресурс, за доступ к которому который потоки конкурируют, то есть участок программы, осуществляющий доступ к памяти, представляет собой блокирующее взаимное исключение параллельного выполнения и реализует семантику семафора. Представлена созданная модель, учитывающая конкуренцию за разделяемый доступ к ресурсу кэш-памяти, расширяя фундаментальный закон Амдала.

**Ключевые слова:** параллелизм, кэш, закон Амдала, разделяемый доступ, критическая секция, гиперпоточность

## MODELING CACHE CONTENTION IN A MULTICORE PROCESSOR

I. L. Artemyeva, A. E. Chusova, A. A. Chusov

Department of Software Engineering and Artificial Intelligence FEFU, Vladivostok

**Abstract.** The article examines the influence of CPU cache on efficiency of multi-threaded computations. The cache is a shared resource for which threads compete, that is, from the perspective of parallel computing, cache access implements the semantics of semaphore-based synchronization, i.e. mutual exclusion of parallel threads and can be considered a critical section. A developed analytical model is presented to take into account this factor of performance degradation, thereby expanding the fundamental Amdahl's law.

**Key words:** parallelism, CPU cache, Amdahl's law, critical section, hyperthreading

Классически закон Амдала выражается теоретическим пределом ускорения  $s$ :

$$s = \frac{1}{1 - f + \frac{f}{T}}, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} s = \frac{1}{1 - f}, \quad (1)$$

где  $T$  – количество параллельных потоков выполнения программы (или количество процессоров, осуществляющих выполнение кода программы), доля  $f$  которой является распараллеливаемой.

Данная математическая модель, однако, рассматривает программу чересчур поверхностно и не позволяет учесть специфические аспекты взаимодействия потоков выполнения друг с другом и с нижележащим аппаратным обеспечением, прежде всего с памятью.

Поэтому в работах [1] и [2] предложено расширение аналитической модели Амдала вероятностной моделью поведения логических эквивалентов процессорного ядра, на которых выполняется параллельная программа с учетом, во-первых, ограниченности снизу количества вычислительной нагрузки на ядро [2] (в работах – ресурс ядра), а во-вторых, – наличия участков программы, выполнение осуществляется последовательно вследствие синхронизации взаимным исключением.

В исследовании рассматривается  $T$ -ядерный процессор с механизмом гиперпоточности со встроенной трехуровневой кэш-памятью, каждый уровень которой эксклюзивен. Каждое ядро имеет свой кэш L1 и L2 уровней, доступ к которым есть только у потоков ядра. Кэш уровня L3 разделяется между всеми потоками. Данная модель представлена на рис. 1.

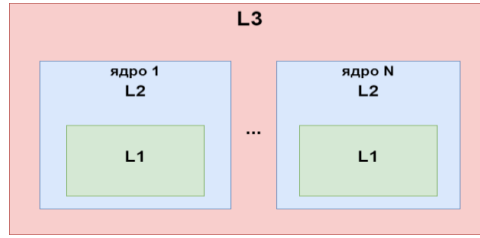


Рисунок 1 – Модель процессора с трёхуровневым кэшем

В настоящей работе выводы из [1] переносятся на случай семафора, когда, в отличие от мьютекса, количество потоков, одновременно выполняющих критическую секцию, ограничивается сверху значением большим (либо равным) 1. В этом случае вероятность одновременного выполнения ровно  $k$  потоками участка программы, выполнение которого ограничено семафором с максимально разрешенным числом потоков  $k$ , и доля которой составляет  $f_{cs}$ , подчиняется биномиальному распределению

$$\Pr[k \text{ из } T \text{ потоков}] = \binom{T}{k} (P_{cs}^k (1 - P_{cs})^{T-k}), \quad (2)$$

где  $P_{cs} = f_{cs}/f$ , которое обусловлено законом комбинирования вероятностей независимых событий (выполнения критической секции программы, защищенной семафором) для каждой из  $\binom{T}{k}$  выборок  $k$  потоков из  $T$ .

Тогда вероятность блокирующей состязательности при использовании одного семафора в программе, выполняемой  $T$  потоками, составляет

$$P_{cocc} = \sum_{i=k+1}^T \binom{T}{i} (P_{cs}^i (1 - P_{cs})^{T-i}) = \sum_{i=1}^T \binom{T}{i} (P_{cs}^i (1 - P_{cs})^{T-i}) - \sum_{i=1}^k \binom{T}{i} (P_{cs}^i (1 - P_{cs})^{T-i}) \quad (3)$$

Таким образом, если время выполнения всей программы целиком составляет единицу, то ожидаемое время выполнения параллельного участка становится равным  $(T - k)TP_{cs}$ , а выражение с помощью него ускорения программы дает в пределе

$$\lim_{T \rightarrow \infty} s = \frac{1}{1 - f(P_{cocc} - 1)}. \quad (4)$$

В настоящей работе эту модель предлагается использовать для оценки потерь времени выполнения на состязательный доступ ядер процессора, с учетом гиперпоточности, к внешней памяти через три уровня кэш подобно модели кэш, предложенной в [3]. Для верификации представленной модели был поставлен эксперимент, при котором потоки выполняют задачу возведение в квадрат числа, размер которого 8 байт. Вычисления выполнялись на процессоре Intel Core i7 8700, имеющий 6 физических ядер. Размер кэша: L1 – 32 KB, L2 – 256 KB, L3 – 12 MB, строка кэша – 64 байта. Операция возведения в степень производилась над различными массивами чисел объёмом  $8 \cdot 10^7$  элементов и  $8 \cdot 10^8$  элементов.

Сравнивались различные стратегии распределения массивов данных (Рис.2).

1) Even – элементы распределяются равномерно; остаток распределяется между  $N \bmod T$  блоками; количество элементов в расширенных блоках  $(N/T) + 1$ , остальные содержат  $N/T$ .

2) First – элементы распределяются равномерно; остаток добавляется в первый блок; количество элементов в расширенном блоке  $(N/T) + N \bmod T$ , остальные содержат  $N/T$ .

3) Middle – элементы распределяется равномерно; остаток добавляется в  $\lfloor N/T \rfloor$  блок;

количество элементов в расширенном блоке  $(N/T) + N \bmod T$ , остальные содержат  $N/T$ .

4) Last – элементы распределяются равномерно; остаток добавляется в последний блок; количество элементов в расширенном блоке  $(N/T) + N \bmod T$ , остальные содержат  $N/T$ .

5) Round Robin – распределение элементов по потокам осуществляется по круговому циклу.

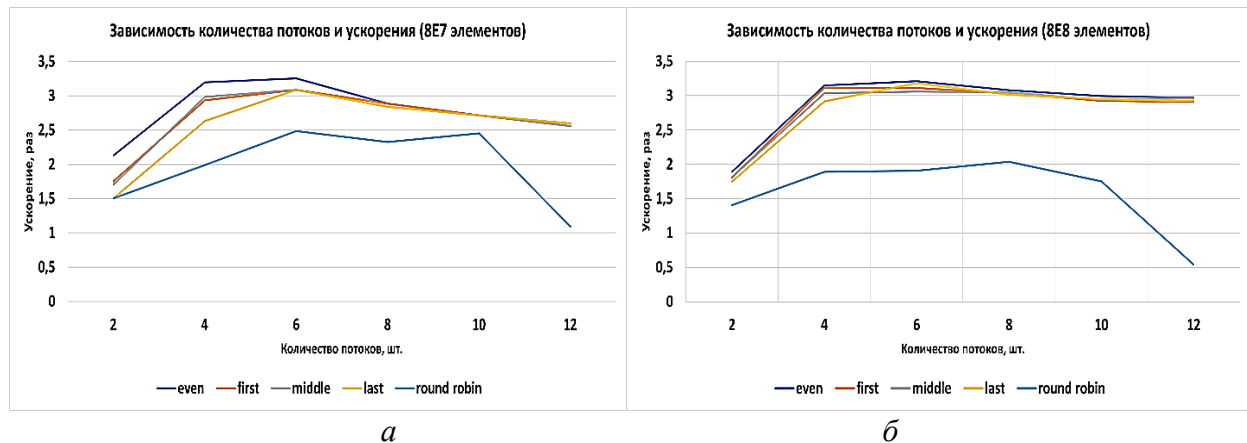


Рисунок 2 – Зависимость количества потоков и ускорения:  $8 \cdot 10^7$  элементов – (а),  $8 \cdot 10^8$  элементов – (б)

Из этого следует, что стратегии even, first, middle, last показали примерно одинаковый прирост производительности, round robin во всех 3 случаях показал наименьшее ускорение за счёт того, что не были использованы преимущества пространственной локальности кэша. Все стратегии показали уменьшение ускорения при количестве потоков больше 6, поскольку были задействованы механизмы гиперпоточности. Результаты экспериментов в некоторой степени согласуются с моделью (3) при подборе соответствующих параметров  $P_{cs}$  и  $f$ .

### Библиографический список

1. Eyerman, S. Modeling critical sections in Amdahl's law and its implications for multicore design / S. Eyerman, L. Eeckhout // ACM Sigarch Computer Architecture News. – 2010. – V. 38. – I. 3. – P. 362–370. – DOI: 10.1145/1816038.1816011.
2. Hill, M. D. Amdahl's Law in the Multicore Era / M. D. Hill, M. R. Marty // Computer. – 2008. – V. 41. – I. 3. – P. 33–38. – DOI: 10.1109/MC.2008.209.
3. Frank, M. Parallelization, Modeling, and Performance Prediction in the Multi-/Many Core Area: A Systematic Literature Review / M. Frank, M. Hilbrich, S. Lehrig, S. Becker // SC2 2017 The IEEE 7th International Symposium on Cloud and Service Computing. – 2017. – DOI: 10.1109/SC2.2017.15.

### Информация об авторах

**Артемьева Ирина Леонидовна** – д-р техн. наук, проф., профессор Департамента программной инженерии и искусственного интеллекта Дальневосточного федерального университета. E-mail: [artemeva.il@dvfu.ru](mailto:artemeva.il@dvfu.ru).

**Чусова Алина Евгеньевна** – аспирант 2-го года обучения, ассистент Департамента программной инженерии и искусственного интеллекта Дальневосточного федерального университета. E-mail: [chusova.ae@dvfu.ru](mailto:chusova.ae@dvfu.ru).

**Чусов Андрей Александрович** – канд. техн. наук, доцент Департамента программной инженерии и искусственного интеллекта Дальневосточного федерального университета. E-mail: [chusov.aa@dvfu.ru](mailto:chusov.aa@dvfu.ru).

## ЭФФЕКТИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КИТАЙСКОЙ ТЕОРЕМЫ ОБ ОСТАТКАХ

М. Г. Бабенко, Е. С. Безуглова

*Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь*

**Аннотация.** Использование кодов исправления ошибок на базе системы остаточных классов позволяет обеспечить необходимый уровень безопасности данных с регулируемой избыточностью. Однако, сдерживающим фактором использование их на практике является большая вычислительная сложность декодирования данных по сравнению с классическими блочными кодами. В статье предлагается метод позволяющий уменьшить вычислительную сложность алгоритма декодирования основанного на Китайской теореме об остатках (КТО) и уменьшить время декодирования в среднем в 1.50 раз и 1.72 раз для КТОI и КТОII соответственно.

**Ключевые слова:** система остаточных классов, Китайская теорема об остатках, ранг числа

## HIGH-SPEED CHINESE REMAINDER THEOREM

M. G. Babenko, E. S. Bezuglova

North-Caucasus Federal University, Stavropol

**Abstract.** The use of error correction codes based on the : residue number system makes it possible to provide the necessary level of data security with adjustable redundancy. However, a limiting factor in using them in practice is the high computational complexity of data decoding compared to classical block codes. The article proposes a method that reduces the computational complexity of the decoding algorithm based on the Chinese Remainder Theorem (CRT) and can reduce the decoding time in the average by 1.50 times and 1.72 times for CRTI and CRTII, respectively.

**Key words:** residue number system, Chinese Remainder Theorem, rank of a number

Использование кодов исправления ошибок на базе системы остаточных классов (СОК) в распределенных системах хранения, передачи и обработки данных позволяет повысить надежность и безопасность их [1]. Однако стоит отметить, что алгоритмы: перевода чисел из СОК в позиционную систему счисления (ПСС), определения знака числа, сравнения чисел, масштабирования и определения переполнения динамического диапазона являются вычислительно сложными [2]. Для их вычисления необходимо вычислить представление числа в ПСС или позиционную характеристику [3]. Для перевода числа из СОК в ПСС используют Китайскую теорему об остатках и ее модификации, алгоритм Гарнера и его модификации, диагональную функцию и функцию ядра Акушского [4]. В статье предложена эффективная реализация Китайской теоремы об остатках с использованием теорем 1 и 2.

Модули СОК  $p_1, p_2, \dots, p_n$  попарно взаимно простые числа. Без потери общности будем считать, что модули СОК удовлетворяют условию  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ . Целое числа  $X \in [0, P)$  в СОК представляется в виде кортежа  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $\forall i = \overline{1, n} : x_i = |X|_{p_i}$ . Существуют две формы записи Китайской теореме об остатках. Используя Китайскую теорему об остатках I (КТОI)  $X$  может быть вычислено:

$$X = \sum_{i=1}^n P_i \left\| P_i^{-1} \right\|_{p_i} x_i \Big|_{p_i} - r_x P,$$

для Китайская теорема об остатках II (КТОII):

$$X = \sum_{i=1}^n P_i \left\| P_i^{-1} \right\|_{p_i} x_i - R_x P,$$

где  $P = \prod_{i=1}^n p_i$ ,  $P_i = P/p_i$  и  $r_x = \left\lfloor \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n P_i \left\| P_i^{-1} \right\|_{p_i} x_i \right\rfloor$ ,  $R_x = \left\lfloor \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n P_i \left\| P_i^{-1} \right\|_{p_i} x_i \right\rfloor$ .

**Теорема 1** (Модифицированная Китайская теорема об остатках I (мКТОI)). Если  $\forall i = \overline{1, n} : \gcd(p_i, q) = 1$ ,  $q \geq n$  и  $y = \left\lfloor X \right\rfloor_p$ , то

$$r_X = \left\lfloor -y + \sum_{i=1}^n k_i \left\| P_i^{-1} \right\|_{p_i} x_i \right\rfloor_q,$$

где  $\forall i = \overline{1, n} : k_i = \left\| p_i^{-1} \right\|_q$ .

**Теорема 2** (Модифицированная Китайская теорема об остатках II (мКТОII)). Если  $\forall i = \overline{1, n} : \gcd(p_i, Q) = 1$ ,  $Q > -n + \sum_{i=1}^n p_i$  и  $z = \left\lfloor X \right\rfloor_Q$ , то

$$R_X = \left\lfloor -z + \sum_{i=1}^n w_i x_i \right\rfloor_Q,$$

где  $\forall i = \overline{1, n} : w_i = \left\| p_i^{-1} \right\|_Q \left\| P_i^{-1} \right\|_{p_i} \Big|_Q$ .

Использование теорем 1 и 2 позволяет, уйти от вычислительно затратной операции нахождения остатка от деления на диапазон СОК  $P$  за счет вычисления значений с использованием вспомогательного модуля  $q$  или  $Q$ , которые меньше  $P$ .

Разработан комплекс программ на языке программирования Python. Моделирование проводилось на персональном компьютере под управлением операционной системы MacOS Monterey вер 12.6, процессор 2,7 GHz 2-ядерный процессор Intel Core i5, оперативная память 8 ГБ 1867 MHz DDR3. Для моделирования использовались наборы СОК представленные в таблицы 1. Каждое из измерений соответствует переводу ста чисел из СОК в ПСС с помощью Результаты моделирования представлены на рис 1.

Таблица 1 – Параметры СОК

$n$	Модули СОК	$q$	$Q$	$\lceil P \rceil$
4	{ 127, 131, 137, 139 }	4	531	29
5	{ 127, 131, 137, 139, 149 }	5	679	36
6	{ 127, 131, 137, 139, 149, 151 }	6	829	43
7	{ 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157 }	7	985	50
8	{ 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163 }	8	1147	58
9	{ 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167 }	9	1313	65
10	{ 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173 }	10	1485	73
11	{ 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179 }	11	1663	80

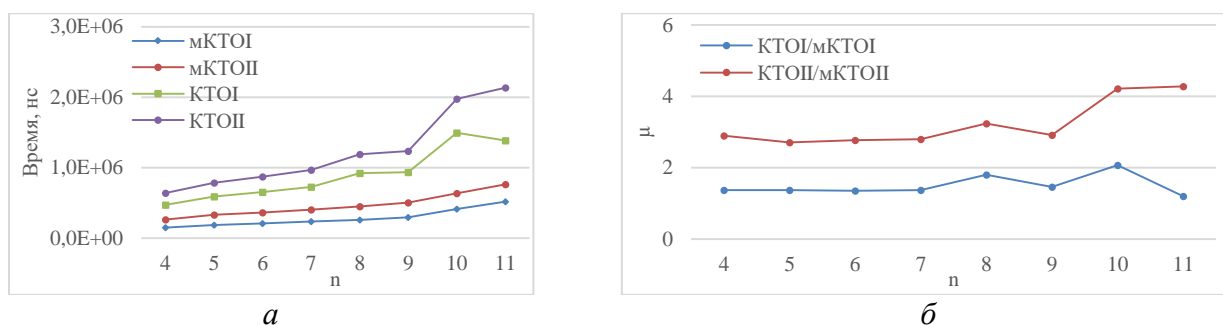


Рисунок 1 – Время перевода из СОК в ПСС (а), Во сколько классическая реализация Китайская теорема об остатках медленее предложенной (б)

Из данных представленных на рис. 1 можно сделать вывод о том, что классическая реализация КТОI и КТОII в среднем в 1.50 раз и 1.72 раз медленее предложенных модификации соответственно. Однако стоит отметить, что предложенная модификация требует хранить, передавать и обрабатывать дополнительный модуль и остаток отделения.

### Библиографический список

1. Celesti, A. Adding long-term availability, obfuscation, and encryption to multi-cloud storage systems / A. Celesti, M. Fazio, M. Villari, A. Puliafito // Journal of Network and Computer Applications. – 2016. – Т. 59. – С. 208–218. – DOI: 10.1016/j.jnca.2014.09.021.
2. Residue Number System / P. V. A. Mohan, P. V. A. Mohan. – Cham, Switzerland : Birkhäuser, 2016. – 351 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-41385-3.
3. Машинная арифметика в остаточных классах / И. Я. Акушский, Д. И. Юдицкий. – М.: Советское радио, 1968. – 440 с.
4. Chervyakov, N. AR-RRNS: Configurable reliable distributed data storage systems for Internet of Things to ensure security / N. Chervyakov, M. Babenko, A. Tchernykh, N. Kucherov, V. Miranda-López, & J. M. Cortés-Mendoza // Future Generation Computer Systems. – 2019. – Т. 92. – С. 1080–1092. – DOI: 10.1016/j.future.2017.09.061.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-10033, <https://rscf.ru/project/19-71-10033/>.

### Информация об авторах

**Бабенко Михаил Григорьевич** – канд физ.-мат. наук, доц., заведующий кафедрой вычислительной математики и кибернетики Северо-Кавказского федерального университета. E-mail: [mgbabenko@ncfu.ru](mailto:mgbabenko@ncfu.ru).

**Безуглова Екатерина Сергеевна** – стажер-исследователь отдела теоретико-числовых систем регионального научно-образовательного математического центра «Северо-Кавказский центр математических исследований» Северо-Кавказского федерального университета. E-mail: [eksbezuglova@ncfu.ru](mailto:eksbezuglova@ncfu.ru).



## ФРАКТАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ГРАНИЦ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ В РЕЖИМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО КОНТРАСТА

Т. К. Барабаш, В. О. Салмиянов, Л. С. Афанасов

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию потенциальных возможностей методики фрактального анализа в приложении к оценке степени неоднородности растровых изображений доменных границ сегнетоэлектриков. Представлены результаты расчета фрактальной размерности границ доменов типичных сегнетоэлектриков, визуализируемых с использованием растрового электронного микроскопа. Выявлено, что эрозия сегнетоэлектрических доменных границ характеризуется увеличением фрактальной размерности. Приведены численные оценки скейлинговой характеристики растровых изображений границ сегнетоэлектрических доменов, наблюдаемых в режиме динамического контраста.

**Ключевые слова:** фрактальный анализ, фрактальная размерность, метод покрытий, сегнетоэлектрик, доменная граница, динамический контраст

## FRactal Characteristics of Ferroelectric Domain Boundaries in Dynamic Contrast Mode

T. K. Barabash, V. O. Salmiyanov, L. S. Afanasov

*Amur State University, Blagoveshchensk*

**Abstract.** The paper is devoted to the study of potential possibilities of the fractal analysis technique to assess the raster images inhomogeneity of the ferroelectric domain boundaries. The computational results of the fractal dimension of the domain boundaries, visualized with the use of a scanning electron microscope for typical ferroelectrics, are reported. Obtained findings allow us to indicate that the erosion of ferroelectric domain boundaries is characterized by an increase in the fractal dimension. The scaling characteristics are numerically estimated for ferroelectric domain boundaries observed in the dynamic contrast mode.

**Key words:** fractal analysis, fractal dimension, “box-counting” method, ferroelectric, domain wall, dynamic contrast

В настоящее время методы фрактального анализа широко используются для количественной спецификации структур, обнаруживающих самоподобие или обладающих свойствами диссипативности, нерегулярности и шероховатости [1]. Концепции фрактального формализма нашли применение в физике конденсированного состояния для анализа твердотельных структур. В числе объектов, обладающих набором скейлинговых характеристик, отмечают перспективный класс полярных диэлектрических материалов – сегнетоэлектрики.

Сегнетоэлектрик имеет неоднородную структуру и разбит на домены, каждому из которых соответствует определенное направление спонтанной поляризации. Способность сегнетоэлектриков к индуцированному переключению поляризации обуславливает востребованность этих материалов в радиотехнике, микроэлектронике и оптике. Сегнетоэлектрические домены являются результатом процесса самоорганизации, фрактальность их свойств была диагностирована многократно рядом независимых авторов. Так, были исследованы геометрические свойства доменов типичных сегнетоэлектриков по данным растровой микроскопии и геометрического рельефа поверхностей, эффекты усталости и наноразмерные домены в сегнетоэлектрических пленках, фрактальная динамика доменов (например, [2–3]),

получены фрактальные характеристики процессов переключения [4–5]. В серии авторских работ показано, что фрактальный анализ является достаточно чувствительной методикой для исследования степени несовершенств доменных границ и может быть использован для количественной характеристики наблюдаемых модификаций в изображении доменных структур. Целью настоящей работы является численная оценка фрактальных характеристик степени неоднородности изображений доменных границ сегнетоэлектриков, полученных в режиме динамического контраста методом растровой электронной микроскопии.

Важнейшим понятием фрактального анализа является понятие фрактальной размерности объекта [1]. Размерность дает количественную оценку степени неоднородности и нерегулярности сложноструктурированных объектов. Метод покрытий (“box-counting” method) основан на соотношении «число частиц – мера» и дает способ вычисления фрактальной размерности  $D$  физического объекта. Следствием этого подхода является возможность оценки фрактальной размерности границы неоднородного объекта. Исходное изображение в бинаризованном формате разбивается на  $2^{2m}$  частей – кластеров, после чего для каждого разбиения подсчитывается длина границы  $L$  как число квадратов с линейным размером  $n$  (альтернативно, периметр  $P=Ln$ ). Построенная в двойном логарифмическом масштабе зависимость:  $\ln(L) \propto -D \ln(n)$  (или  $\ln(P) \propto (1-D) \ln(n)$ ) позволяет установить фрактальную размерность объекта.

Метод покрытий был применен для анализа изображений границы линзообразного домена типичного сегнетоэлектрика триглицинсульфата (ТГС). В качестве исходных изображений использованы микрофотографии, полученные в режиме токов электронно-стимулированной поляризации [6] при токе зонда  $10^{-9}$  А, энергии пучка 3–5 кэВ и при различном времени облучения. На рис. 1 (а) показан пример визуализации скейлинговой зависимости для фрагмента границы домена кристалла ТГС в режиме токов электронно-стимулированной поляризации после 5 мин. облучения (максимальное значение). Оценка фрактальной размерности в этом случае дает значение  $D=1.56$ .

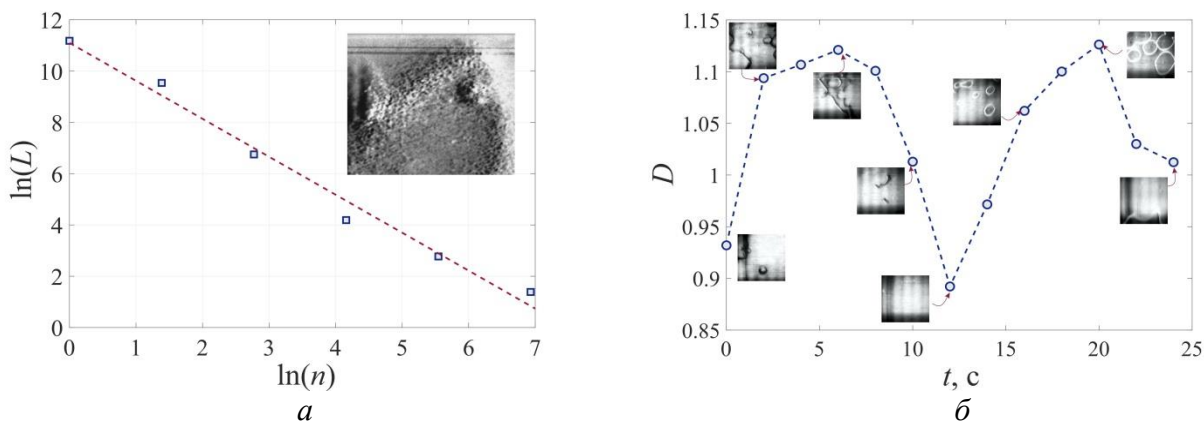


Рисунок 1 – Скейлинговая зависимость для границы домена кристалла ТГС (на вставке) – (а), временная зависимость фрактальной размерности для РЭМ-изображения доменной структуры кристалла ТГС в полном цикле переключения поляризации – (б)

Проведенная серия вычислений, соответствующая этапам последовательного облучения, позволила установить, что размерность изменяется в диапазоне [1.12, 1.56]. Длительное облучение образца приводит к эрозии изображения: линия границы распадается на ряд точек и расширяется. Эрозия может быть обусловлена изменением структуры приграничной области с разветвленной антипараллельной структурой. Увеличение фрактальной размерности характеризует усложнение геометрии доменов.

Характерной чертой процесса переключения поляризации многих сегнетоэлектриков является повторяемость процесса от цикла к циклу. Визуализация изменения фрактальной размерности изображения доменных границ сегнетоэлектрика ТГС в процессе динамики до-

менной структуры, наблюдаемой в режиме потенциального контакта [6], представлена на рис. 1 (б).

Фрактальный анализ геометрии доменных границ, как при росте положительных, так и при прорастании отрицательных доменов, проведенный методом покрытий, дает изменение размерности в диапазоне  $D \in [0.93, 1.26]$ . Можно сделать вывод о том, что усложнение доменной структуры как для роста положительных, так и для роста отрицательных доменов происходит практически одинаково. Минимальное значение соответствовало начальному этапу зарождения зародышей новой фазы с практически регулярными границами и заключительному этапу «схлопывания» областей остаточной поляризации. Максимальное значение соответствовало критическому состоянию: площадь переключенной области была равна площади не переключенной области. Таким образом, можно сделать вывод, что методика фрактального анализа может быть использована не только для характеристики и классификации статических доменных структур (кластеры, «вязкие пальцы», паркет и др.), а также предоставляет численный инструмент для оценки эволюции сложности доменных границ сегнетоэлектрических доменов в процессе эволюции.

### Библиографический список

1. Falconer, K. J. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. – Chichester: Wiley, 2014. – 400 p.
2. Ozaki, T. Fractal aspects of lamellar ferroelectric domain structures formed under the influence of depolarization fields in  $\text{CsH}_2\text{PO}_4$  and  $(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{COOH})_3\text{H}_2\text{SO}_4$  / Ozaki T., Fujii K. Ohgami J. // Journal of the physical society of Japan. – 1995. – V. 64(7). – P. 2282–2285.
3. Galiyarova, N. M. Fractal dimensionalities and microstructural parameters of piezoceramics PZTNB-1 / N. M. Galiyarova, A. B. Bey, E. A. Kuznetsov, Y. I. Korchmariyuk // Ferroelectrics. – 2004. – V. 307. – P. 205–211.
4. Shur, V. Ya. Formation of self-similar surface nano-domain structures in lithium niobate under highly nonequilibrium conditions / V. Ya. Shur, D. K. Kuznetsov, A. I. Lobov et al // Ferroelectrics. – 2006. – V. 341. – P. 85–93.
5. Maslovskaya, A. G. Multifractal analysis of electron beam stimulated process of polarization reversal in ferroelectrics / A. G. Maslovskaya, T. K. Barabash // Asian School-Conference on Physics and Technology of Nanostructured Materials. Сер. "Physics Procedia". – 2012. – С. 81–85.
6. Масловская, А. Г. Взаимодействие электронных пучков средних энергий с сегнетоэлектрическими материалами / А. Г. Масловская, И. Б. Копылова – Владивосток: изд-во Дальнаука, 2010. – 204 с.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8.

### Информация об авторах

**Барабаш Татьяна Константиновна** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем Амурского государственного университета. E-mail: barabash-tatyana@mail.ru.

**Салмиянов Владислав Олегович** – аспирант 1-го года обучения, Амурский государственный университет. E-mail: svsalmiyanov@mail.ru.

**Афанасов Леонид Сергеевич** – младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем Амурского государственного университета. E-mail: l.a.1996@mail.ru.

# ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

**М. Х. Бештоков**

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик*

**Аннотация.** Изучены локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения гиперболического типа с двумя операторами дробного дифференцирования. Методом энергетических неравенств при различных соотношениях между порядками дробной производной  $(\alpha, \beta)$  для решения рассматриваемых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей исходной дифференциальной задачи со скоростью равной порядку аппроксимации разностной схемы.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, нелокальное условие, краевая задача, дробная производная Герасимова–Капуто, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость

## LOCAL AND NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH TWO FRACTIONAL DIFFERENTIATION OPERATORS

**M. Kh. Beshtokov**

*Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik*

**Abstract.** Local and nonlocal boundary value problems for the hyperbolic type equation with two fractional differentiation operators are studied. Using the method of energy inequalities for various relations between the orders of the fractional derivative  $(\alpha, \beta)$ , a priori estimates in differential and difference interpretations are obtained for the solution of the problem under consideration, which imply the uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right-hand side, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem at the rate equal to the of approximation.

**Key words:** hyperbolic equation, non-local condition, boundary value problem, Gerasimov–Caputo fractional derivative, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence

**Постановка начально-краевой задачи с условием третьего рода и априорная оценка в дифференциальной форме**

В замкнутом прямоугольнике  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\beta \left( \eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -\Pi(l, t) = \beta(t) u(l, t) - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$0 < c_0 \leq k(x, t), \eta(x) \leq c_1, \quad |q(x, t)|, |r(x, t)|, |\beta(t)|, |r_x(x, t)|, |k_x(x, t)| \leq c_2, \quad (4)$$

$\partial_{0t}^\gamma u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\gamma}$  — дробная производная в смысле Герасимова–Капуто порядка  $\gamma$ ,

$0 < \gamma < 1$ ,  $\mu(t)$  — непрерывная функция,  $\Pi(x, t) = k(x, t)u_x + \partial_{0t}^\alpha(\eta u_x)$ .

**Теорема 1.** Если  $k(x, t) \in C^{1,0}(\mathcal{Q}_T)$ ,  $\eta(x) \in C^1[0, l]$ ,  $r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(\mathcal{Q}_T)$ ,  $u(x, t) \in C^{2,0}(\mathcal{Q}_T) \cap C^{1,0}(\overline{\mathcal{Q}_T})$ ,  $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\overline{\mathcal{Q}_T})$ ,  $\partial_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\overline{\mathcal{Q}_T})$  и выполнены условия (4), то для решения задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$1) \text{ в случае, когда } \alpha > \beta: \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)} \|u_x\|_0^2 \leq M_1 \left( D_{0t}^{-\alpha} (\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0^2 \right),$$

$$2) \text{ в случае, когда } \alpha = \beta: \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M_2 \left( D_{0t}^{-\alpha} (\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right),$$

где  $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$ ,

$$3) \text{ в случае, когда } \alpha < \beta: \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)} \|u\|_0^2 \leq M_3 \left( D_{0t}^{-\beta} (\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u'_0(x)\|_0^2 \right),$$

где  $M_1, M_2, M_3 = \text{const} > 0$ .

Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

**Устойчивость и сходимость разностной схемы.** На равномерной сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$  дифференциальной задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации  $O(h^2 + \tau^2)$  при  $\alpha = \beta$  и  $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$  при  $\alpha \neq \beta$ :

$$\Delta_{0t}^\alpha y = \chi_i^j \left( a_i^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right)_{x,i} + \Delta_{0t}^\beta (\gamma_i y_x)_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (5)$$

$$y_0^{(\sigma)} = 0, \quad (6)$$

$$-\left( \chi_N a_N y_{x,N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t}^\alpha (\gamma_N y_{x,N}) \right) = \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t}^\alpha y_N - \tilde{\mu}, \quad (7)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (8)$$

где  $\Delta_{0t}^\gamma y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\gamma, \sigma)} y_s^*$  — дискретный аналог дробной производной Герасимова–

Капуто порядка  $\gamma, 0 < \gamma < 1$ , обеспечивающий порядок точности  $O(\tau^{3-\gamma})$  при  $\sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}$ , и

$O(\tau^{2-\gamma})$  при  $\sigma = 0.5$ ,  $a_0^{(\gamma, \sigma)} = \sigma^{1-\gamma}$ ,  $a_l^{(\gamma, \sigma)} = (l + \sigma)^{1-\gamma} - (l - 1 + \sigma)^{1-\gamma}$ ,  $l \geq 1$ ,

$$b_l^{(\gamma, \sigma)} = \frac{1}{2-\gamma} \left[ (l + \sigma)^{2-\gamma} - (l - 1 + \sigma)^{2-\gamma} \right] - \frac{1}{2} \left[ (l + \sigma)^{1-\gamma} - (l - 1 + \sigma)^{1-\gamma} \right], \quad l \geq 1, \text{ при } j = 0, c_0^{(\gamma, \sigma)} = a_0^{(\gamma, \sigma)}$$

$$\text{при } j > 0, c_s^{(\gamma, \sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\gamma, \sigma)} + b_1^{(\gamma, \sigma)}, & s = 0; \\ a_s^{(\gamma, \sigma)} + b_{s+1}^{(\gamma, \sigma)} - b_s^{(\gamma, \sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1; \\ a_j^{(\gamma, \sigma)} - b_j^{(\gamma, \sigma)}, & s = j, \end{cases} \quad \sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}, \text{ при } \alpha = \beta \text{ и } \sigma = 0.5, \text{ при } \alpha \neq \beta$$

$$c_s^{(\gamma, \sigma)} > \frac{1-\gamma}{2} (s + \sigma)^{-\gamma} > 0, a_i^j = k(x_{i-0.5}, t_{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})}, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+\sigma}),$$

$$r(x, t_{j+\sigma}) = r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \quad |r(x, t_{j+\sigma})| = r^+(x, t_{j+\sigma}) - r^-(x, t_{j+\sigma}), \quad \tilde{\mu}(t_{j+\sigma}) = \mu(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N,$$

$$r^+(x, t_{j+\sigma}) = 0.5(r(x, t_{j+\sigma}) + |r(x, t_{j+\sigma})|) \geq 0, \quad r^-(x, t_{j+\sigma}) = 0.5(r(x, t_{j+\sigma}) - |r(x, t_{j+\sigma})|) \leq 0,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j, \quad d_i^j = q(x_i, t_{j+\sigma}), a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i=0, i=N \\ h, & i \neq 0, i \neq N \end{cases} \quad \tilde{\beta}(t_{j+\sigma}) = \beta + 0.5 h d_N^j,$$

$$\chi(x, t) = \frac{1}{1+R(x, t)}, \quad R(x, t) = \frac{0.5h|r(x, t)|}{k(x, t)} - \text{разностное число Рейнольдса.}$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (4), тогда существует такое малое  $\tau_0$ , что если  $\tau \leq \tau_0$ , то для решения разностной задачи (5)-(8) справедливы априорные оценки:

$$1) \text{ в случае, когда } \alpha > \beta: \|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_3 \left( \|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2) \right),$$

$$2) \text{ в случае, когда } \alpha = \beta: \|y^{j+1}\|_{w_2^1(0,l)}^2 \leq M_4 \left( \|y^0\|_{w_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2) \right),$$

$$\text{где } \|y^{j+1}\|_{w_2^1(0,l)}^2 = \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2,$$

$$3) \text{ в случае, когда } \alpha < \beta: \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M_5 \left( \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2) \right).$$

Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (5)-(8) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (5)-(8) к решению дифференциальной задачи (1)-(3) так, что существует такое  $\tau_0$ , что при  $\tau \leq \tau_0$ , справедливы оценки:

$$1) \text{ в случае, когда } \alpha > \beta: \|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0^2 \leq M_3 (h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}}),$$

$$2) \text{ в случае, когда } \alpha = \beta: \|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{w_2^1(0,l)}^2 \leq M_4 (h^2 + \tau^2),$$

$$3) \text{ в случае, когда } \alpha < \beta: \|y_{\bar{x}}^{j+1} - u_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M_5 (h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}}),$$

где  $M_3, M_4, M_5 - \text{const} > 0$ , не зависящая от  $h$  и  $\tau$ .

**Замечание.** Изучены нелокальные задачи, когда второе условие в (2) принимает вид:

$$-\Pi(l, t) = \int_0^l \rho(x, t) u(x, t) dx - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad |\rho(x, t)| \leq c_2, \quad (2')$$

$$-\Pi(l, t) = \beta(t) u(0, t) + \int_0^t \rho(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad |\beta(t)|, |\rho(x, t, \tau)| \leq c_2, \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (2'')$$

### Библиографический список

1. Alikhanov, A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations // Differ. Eq. – 2010. – V. 46(5). – DOI: 10.1134/S0012266110050058.
2. Alikhanov, A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. – 2015. – № 280. – DOI: 10.1016/j.amc.2012.10.029.
3. Beshtokov, M. Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a sobolev-type equation with a fractional-order time derivative // Comp. Math. Math. Phys. – 2019. – V. 59(2).
4. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М: Наука, 1977. – 656 с.
5. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М: Наука, 1973. – 415 с.
6. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1960. – 656с.

### Информация об авторах

**Бештоков Мурат Хамидбиевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., в.н.с. отдела вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

З. В. Бештокова

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик*

**Аннотация.** В статье изучается интегро-дифференциальное уравнение диффузии в многомерной области с неоднородными граничными условиями первого рода. Для приближенного решения начально-краевой задачи строится локально-одномерная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$ . Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в разностной трактовке, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения локально-одномерной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Построен алгоритм численного решения.

**Ключевые слова:** многомерная задача, уравнение диффузии, параболическое уравнение, условие первого рода, разностные схемы, локально-одномерная схема, априорная оценка, устойчивость, сходимость

## NUMERICAL SOLUTION OF THE INTEGRO-DIFFERENTIAL DIFFUSION EQUATION IN A MULTIDIMENSIONAL DOMAIN WITH INHOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND

Z. V. Beshtokova

*Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik*

**Abstract.** The article studies an integro-differential diffusion equation in a multidimensional domain with inhomogeneous boundary conditions of the first kind. For an approximate solution of the initial-boundary value problem, a locally one-dimensional scheme by A. A. Samarskii with order of approximation  $O(h^2 + \tau)$ . Using the method of energy inequalities, we obtain a priori estimates in the difference interpretation, from which the uniqueness, stability, and convergence of the solution of the locally one-dimensional difference scheme to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme follow. An algorithm for the numerical solution is constructed.

**Key words:** multidimensional problem, diffusion equation, parabolic equation, condition of the first kind, difference schemes, locally one-dimensional scheme, a priori estimate, stability, convergence

**Постановка задачи.** В замкнутой области  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$ , основанием которой является  $p$ -мерный куб  $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma$ ,  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , рассматривается первая начально-краевая задача для интегро-дифференциального уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u_T = \mu(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (3)$$

где  $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u$ ,  $L_{\alpha} u = k \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} - \int_0^l H_{\alpha}(x,t) u dx_{\alpha}$ ,  $k = \text{const} > 0$ ,  $|H_{\alpha}(x,t)| \leq c_0$ ,  $c_0 = \text{const} > 0$ ,

$$u(x,t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T), \quad H_{\alpha}(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T), \quad (4)$$

$\mu_{\pm\alpha}(x,t), u_0(x)$  – непрерывные функции,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ .

### Построение локально-одномерной разностной схемы Самарского А.А.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению  $Ox_{\alpha}$  с шагом  $h = l/N$  (кубическая сетка с шагом  $h$ ):

$$\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h,\alpha}^p, \quad \bar{\omega}_{h,\alpha} = \left\{ x_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = i_{\alpha} h; i_{\alpha} = 1, \dots, N-1, x_{\alpha}^{(0)} = 0, x_{\alpha}^{(N)} = N \frac{h}{2} \right\}.$$

На отрезке  $[0, T]$  также введём равномерную сетку  $\bar{\omega}_{\tau} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$  с шагом  $\tau = T/j_0$ . Каждый из отрезков  $[t_j, t_{j+1}]$  разобьём на  $p$  частей, введя точки  $t_{j+\alpha/p} = t_j + \tau \frac{\alpha}{p}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$ , и обозначим через  $\Delta_{\alpha} = \left( t_{j+\alpha-1/p}, t_{j+\alpha/p} \right]$  полуинтервал, где  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ .

Уравнение (1) перепишем в виде  $\sum_{\alpha=1}^p \Re_{\alpha} u = 0$ ,  $\Re_{\alpha} u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_{\alpha} u - f_{\alpha}$ ,  $\sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f$  где  $f_{\alpha}(x,t)$ ,  $(\alpha = 1, 2, \dots, p)$  – произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и  $f(x,t)$ , удовлетворяющие условию нормировки  $\sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f$

На каждом полуинтервале  $\Delta_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , будем последовательно решать задачи

$$\begin{aligned} \Re_{\alpha} \vartheta_{(\alpha)} &= \frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_{\alpha} \vartheta_{(\alpha)} - f_{\alpha} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ \vartheta_{(\alpha)} &= \mu_{-\alpha}, \quad x_{\alpha} = 0, \quad \vartheta_{(\alpha)} = \mu_{+\alpha}, \quad x_{\alpha} = l, \end{aligned} \quad (5)$$

полагая при этом,

$$\begin{aligned} \vartheta_{(1)}(x,0) &= u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}^j(x, t_j) = \vartheta_{(p)}^{j-1}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \\ \vartheta_{(\alpha)}^j \left( x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right) &= \vartheta_{(\alpha-1)}^j \left( x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right), \quad \alpha = 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \end{aligned}$$

$\mu_{-\alpha} = \mu(x', 0, t)$ ,  $\mu_{+\alpha} = \mu(x', l, t)$  – непрерывные функции.

Аппроксимируем каждое уравнение (5) номера  $\alpha$  неявной схемой на полуинтервале  $\Delta_{\alpha}$ , тогда получим цепочку из  $p$  одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_{\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad x_{\alpha} \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu_{-\alpha}, \quad x_{\alpha} = 0, \quad y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu_{+\alpha}, \quad x_{\alpha} = l, \quad (7)$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad (8)$$



где  $\Lambda_{\alpha} y^{j+\frac{\alpha}{p}} = k y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \sum_{i_{\alpha}=0}^N \delta_{\alpha, i_{\alpha}} y_{i_{\alpha}}^{j+\frac{\alpha}{p}} \hbar$ ,  $\delta_{\alpha} = H_{\alpha}(x_{\alpha}, \bar{t})$ ,  $\varphi_{\alpha} = f_{\alpha}(x, \bar{t})$ ,  $\bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}$ ,  $\hbar = \begin{cases} h, i_{\alpha} = 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{h}{2}, i_{\alpha} = 0, N \end{cases}$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $\gamma_{h, \alpha}$  – множество граничных по направлению  $x_{\alpha}$  узлов.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (4), тогда схема (6)-(8) устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения схемы (6)-(8) при  $\tau \leq \tau_0$ , справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \rho_p y^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \left\| \rho_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right) \leq \\ & \leq M \left( \left\| y^0 \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left\| \varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta \neq i_{\alpha}} (\mu_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(l, x', t_{j'})) \bar{H}/h \right), \end{aligned}$$

где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ ,

$$\begin{aligned} (u, v) &= \sum_{x \in \omega_h} uv H, H = h^p, \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 = \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \frac{H}{h}, \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_{\alpha}=1}^{N-1} y_{i_{\alpha}}^2 h, \\ [u, v] &= \sum_{x \in \bar{\omega}_h} uv \bar{H}, \bar{H} = \hbar^p, \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 = \sum_{i_{\beta} \neq i_{\alpha}} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \frac{\bar{H}}{h}, \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_{\alpha}=0}^N y_{i_{\alpha}}^2 \hbar, \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть задача (1)-(3) имеет единственное непрерывное в  $\bar{Q}_T$  решение  $u(x, t)$  и существуют непрерывные в  $\bar{Q}_T$  производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_{\alpha}^2 \partial x_{\beta}^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_{\alpha}^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha}^2}, \alpha = 1, 2, \dots, p$ ,  $\alpha \neq \beta$  и выполнены условия гладкости и ограниченности (4), тогда локально-одномерная схема (6)-(8) сходится к решению дифференциальной задачи (1)-(3) со скоростью  $O(h^2 + \tau)$  так что при достаточно малом  $\tau$  имеет место оценка

$$\left\| y^{j+1} - u^{j+1} \right\|_1 \leq M(h^2 + \tau), 0 < \tau \leq \tau_0,$$

$$\text{где } \left\| z^{j+1} \right\|_1^2 = \left\| \rho_p z^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \left\| \rho_{\alpha} z_{\bar{x}_{\alpha}}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \left\| z^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right).$$

### Библиографический список

1. Douglas, J. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables / J. Douglas, H. H. Rachford // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 82(2).
2. Peaceman, D. W. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / D. W. Peaceman, H. H. Rachford // J. Industr. Math. Soc. – 1955. – V. 3(1).
3. Бештокова, З. В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода / З. В. Бештокова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2022. – Т. 26(1). – С. 7–35. – DOI: 10.14498/vsgtu1908.
4. Бештокова, З. В. Конечно-разностные методы решения нелокальной краевой задачи для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида / З. В. Бештокова // Дальневост. матем. журн. – 2022. – Т. 2(1). – С. 3–27.
5. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415 с.

### Информация об авторах

**Бештокова Зарьяна Владимировна** – м.н.с. отдела вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. E-mail: zarabaeva@yandex.ru.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ ОНКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ В ХАБАРОВСКОМ КРАЕ

Д. А. Бондарь, Е. Г. Агапова

*Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск*

**Аннотация.** Работа посвящена вопросам прогнозирования онкобольных в Хабаровском крае. Компьютерное прогнозирование погоды получило в настоящее время широкое распространение. Оно основывается на анализе и обработке данных больных: возраст, диагноз, место проживания, дата постановки на учет, гендерная принадлежность, выявлении закономерностей их изменения и получения (прогнозирования) значений значимых факторов. В работе рассматриваются вопросы применения нейронных сетей для прогнозирования количества онкобольных.

**Ключевые слова:** анализ, прогноз, нейронная сеть, значимость

## USING NEURAL NETWORKS TO PREDICT CANCER IN Khabarovsk KRAI

D. A. Bondar, E. G. Agapova  
Pacific State University, Khabarovsk

**Abstract.** The work is devoted to the forecasting of cancer patients in Khabarovsk Krai. Computerized weather forecasting is currently widespread. It is based on the analysis and processing of patients' data: age, diagnosis, place of residence, date of registration, gender identity, identifying patterns of their changes and obtaining (predicting) values of significant factors. The paper deals with the application of neural networks to predict the number of cancer patients.

**Key words:** analysis, prediction, neural network, significance

В наши дни наиболее актуальными являются методы обработки статистических данных, одними из которых являются нахождение среднего арифметического, медианы, дисперсии, максимума и минимума, а также проведение корреляционного, дисперсионного и других анализов.

Например, для грамотного трейдинга в первую очередь необходимо вычислить среднеквадратичное отклонение, простое и экспоненциальное скользящие средние, а также экономические показатели, что позволит трейдеру сделать свою торговлю ясной и логичной.

Предметом исследования является массив данных онкобольных по Хабаровскому краю.

Цель исследования заключается в исследовании динамики распространения онкологических заболеваний в Хабаровском крае с целью прогнозирования.

В работе применены методы статистического анализа с использованием нейронных сетей [1].

Обработка статистических данных применяется во многих сферах деятельности человека. Наиболее часто использование методов обработки встречается в сфере финансов и медицины [2–4].

В медицине на первых этапах происходит сортировка собранных данных, построение графиков и гистограмм для выявления районов, в которых некоторое заболевание распространяется более активно. Далее применяются факторные и корреляционно-регрессионные анализы для выявления причин, способствующих развитию болезни [5].

Для статистической обработки КГБУЗ «ККЦО» был предоставлен реестр,

включающий в себя информацию об онкобольных пациентах в Хабаровском крае за 1951(частично) – 2021 гг., их гендерной принадлежности, дате рождения, коде диагноза и стадии, дате установления диагноза и постановки на учёт, коде района проживания (общее количество строк 38140).

Модели, построенные на основе временных рядов с помощью нейронных сетей, как правило, одни из самых точных моделей, поэтому их часто используют для прогноза. В исходных данных содержалась информация о том, когда пациент был поставлен на учёт и когда ему поставили диагноз.

При построении модели – количество онкобольных, которым был поставлен диагноз: заболевание органов репродуктивной функции – получили пять сетей (моделей), которые представлены на рис. 1.

Итоги моделей (Модели)											
Включенные наблюдения: 1:61											
N	Архитектура	Производительность обуч.	Контр. производительность	Тест. производительность	Ошибка обучения	Контрольная ошибка	Тестовая ошибка	Алгоритм обучения	Функция ошибки	Ф-я актив. скрытых нейр.	Ф-я актив. выходных нейр.
1	MLP 18-2-1	0.958366	0.976519		144.0189	189.4727		BFGS 9	Сум. квадр.	Логистическая	Тождественная
2	MLP 18-2-1	0.956286	0.976277		263.6152	200.3557		BFGS 8	Сум. квадр.	Гиперболическая	Тождественная
3	MLP 18-4-1	0.959996	0.979256		47.1782	145.5925		BFGS 12	Сум. квадр.	Экспонента	Тождественная
4	MLP 18-3-1	0.960023	0.978360		46.6121	148.0692		BFGS 15	Сум. квадр.	Экспонента	Тождественная
5	MLP 18-3-1	0.957922	0.976449		128.1099	241.1338		BFGS 9	Сум. квадр.	Логистическая	Тождественная

Рисунок 1 – Пять моделей количества онкобольных с диагнозом заболевания органов репродуктивной функции (по годам)

Все модели удовлетворяют условию нормального распределения. Визуально более приближенные значения получились с помощью построения четвертой модели под названием MLP 18-3-1. В результате получили модель, которая с вероятностью 95 % предсказывает, что количество пациентов с заболеваниями органов репродуктивных функций в 2022 году составит 583 человека.

При построении модели – количество онкобольных, которым был поставлен диагноз: заболевание органов репродуктивной функции – получили 5 сетей (рис. 2).

Итоги моделей (Модели)											
Включенные наблюдения: 1:732											
N	Архитектура	Производительность обуч.	Контр. производительность	Тест. производительность	Ошибка обучения	Контрольная ошибка	Тестовая ошибка	Алгоритм обучения	Функция ошибки	Ф-я актив. скрытых нейр.	Ф-я актив. выходных нейр.
6	MLP 113-7-1	0.965052	0.962969		5,001155	7,903045		BFGS 9	Сум. квадр.	Логистическая	Тождественная
7	MLP 113-6-1	0.971149	0.962942		3,908053	7,917413		BFGS 10	Сум. квадр.	Экспонента	Тождественная
8	MLP 113-2-1	0.960122	0.962477		5,882580	8,009594		BFGS 10	Сум. квадр.	Логистическая	Тождественная
9	MLP 113-2-1	0.965930	0.962376		5,093216	8,466574		BFGS 8	Сум. квадр.	Гиперболическая	Тождественная
10	MLP 113-6-1	0.965841	0.962061		4,955076	8,242407		BFGS 11	Сум. квадр.	Логистическая	Тождественная

Рисунок 2 – Пять моделей количества онкобольных с диагнозом заболевания органов репродуктивной функции (по месяцам)

Все модели удовлетворяют условию нормального распределения. Визуально более приближенные значения получились с помощью второй модели.

В результате получили модель, которая с вероятностью 95 % предсказывает, что количество пациентов с заболеваниями органов репродуктивных функций в 2022 году в каждом месяце составит значение, представленное в табл. 1.

При дальнейшем исследовании требуется изучить влияние экологических факторов на распространение болезни в каждом районе, построить нелинейную функцию нескольких переменных, с помощью которой можно было бы предсказать количество онкобольных, используя в качестве независимых переменных оказывающие влияние на динамику распространения факторы.

Таблица 1 – Предсказанные значения в 2022 г. (по месяцам)

Месяц	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
Предсказанные значения	48	30	31	47	50	36	32	22	37	42	45	21

### Библиографический список

1. Жданов, А. А. Разработка топологии нейронной сети для прогнозирования нестационарных временных рядов / А. А. Жданов, А. В. Власенко // Евразийское Научное Объединение. – 2018. – № 12–1(46). – С. 73–76.
2. Агапова, Е. Г. Многомерный анализ качества муниципальных услуг в Хабаровском крае / Е. Г. Агапова, Ю. С. Новиков // Наука Красноярья. – 2019. – Т. 8. – № 5–3. – С. 7–11.
3. Лучинин, А. С. Прогностические модели в медицине / А. С. Лучинин // Клиническая онкогематология. Фундаментальные исследования и клиническая практика. – 2023. – Т. 16. – № 1. – С. 27–36. – DOI 10.21320/2500-2139-2023-16-1-27-36. – EDN UZEQZU.
4. Riley, R. D. Minimum sample size for external validation of a clinical prediction model with a binary outcome / R. D. Riley, T. P. A. Debray, G. S. Collins, et al. // Stat Med. – 2021. V. 40(19). – P. 4230–51. – DOI: 10.1002/sim.9025.
5. Большакова, Л. В. Методика применения статистического пакета анализа для проведения корреляционно-регрессионного анализа в ходе экономических исследований / Л. В. Большакова // Вестник экономической безопасности. – 2021. – № 3. – С. 259–265.

### Благодарности

Исследования проводились при поддержке Хабаровского отделения регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований» (допсоглашение с Минобрнауки от 16 февраля 2023 г № 075-02-2023-932).

### Информация об авторах

**Бондарь Дарья Антоновна** – магистрант «Прикладная математика и информатика», Тихоокеанского государственного университета. E-mail: 2018101658@pnu.edu.ru.

**Агапова Елена Григорьевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., Тихоокеанского государственного университета. E-mail: 000614@pnu.edu.ru.

## СПОСОБ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ И СТОЙКОСТИ ОБФУСЦИРУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ БИНАРНЫХ ИСПОЛНИМЫХ ФАЙЛОВ

П. Д. Борисов<sup>1</sup>, Ю. В. Косолапов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГАНУ НИИ «Спецвузавтоматика», Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

**Аннотация.** Предлагается способ автоматической оценки эффективности и стойкости обфусцирующих преобразований, основанный на вычислении функции похожести бинарных исполнимых файлов программ и их обфусцированных и деобфусцированных версий.

**Ключевые слова:** обфускация, похоть программ, понимаемость программ

## METHOD FOR EVALUATING THE EFFICIENCY AND POTENCY OF OBFUSCIOUS TRANSFORMATIONS FOR BINARY EXECUTABLE FILES

P. D. Borisov<sup>1</sup>, Y. V. Kosolapov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>FSASE SRI «Specvuzavtomatika», Rostov-on-Don

<sup>2</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don

**Abstract.** A method is proposed for automatic evaluation of the efficiency and potency of obfuscating transformations, based on the calculation of the similarity function of binary executable files of programs and their obfuscated and deobfuscated versions.

**Key words:** obfuscation, program similarity, program comprehensibility

Обфусцирующие преобразования обычно применяются для затруднения исследования программ аналитиком (автоматическими средствами и/или человеком). В [1] отмечено, что изыскания в этой области ведутся, с одной стороны, по направлению криптографии (обфускация с доказуемой стойкостью), а с другой стороны, по направлению системного программирования (обфускация с эвристическим обоснованием стойкости). Криптографами в [2] доказано, что не существует запутывающего преобразования, которое бы было стойким в рамках модели «виртуального черного ящика» для всех программ. Не строго говоря, это означает, что для любого запутывающего преобразования найдется программа, по обфусцированному коду которой аналитик может получить больше информации, чем по набору входных и соответствующих выходных данных этой программы. При этом для отдельных классов программ доказуемо стойкая обфускация в модели «виртуального черного ящика» существует [3], а также существуют стойкие запутывающие преобразования для отдельных классов программ в некоторых вариациях этой модели (см. обзор [1]). В криптографии особое место занимает неразличимая обфускация, которая позволяет строить стойкие функциональные схемы шифрования [4]. Однако применение неразличимой обфускации на практике затруднено из-за роста размера программы, и пока неясно, насколько такая обфускация затрудняет анализ программ. Исследования в области обфускации по направлению системного программирования, как замечено в [1], сравнимы с состязанием щита и меча: для используемых на практике способов запутывания кода рано или поздно находятся способы деобфускации. Например, обфускация с помощью смешанной булевой и целочисленной арифметики, предложенная в 2007 г. (см. [5]), долгое время считалась надежным способом затруднения процесса анализа программ и использовалась в коммерческих средствах обфускации. Но в начале 2023 г. разработчиками дизассемблера IDA Pro было анонсировано средство деобфускации, использующее новейшие результаты в

области упрощения выражений со смешанной булевой и целочисленной арифметикой [6]. Однако, несмотря на недостаток теоретического обоснования стойкости, эвристические способы запутывания кода в совокупности с методами противодействия отладке и дизассемблированию могут обеспечить уровень защиты от исследования, достаточный для достижения целей пользователями этих методов: например, время анализа кода компьютерной игры может быть больше времени, в течение которого разработчик игры успеет реализовать достаточное для получения прибыли количество лицензий.

Для пользователя средств обфускации одной из первых задач является выбор набора запутывающих преобразований  $\mathbf{O}$  и последовательности  $seq$  их применения, затрудняющих исследование программы аналитиком. В работе предполагается, что аналитику доступен только бинарный исполнимый файл программы. Так как для программ, компилируемых в бинарный исполнимый код, запутывающие преобразования могут применяться на уровне исходного кода, уровне промежуточного представления и на уровне бинарного исполнимого кода, то множество возможных значений последовательности  $seq$  даже для небольшого множества  $\mathbf{O}$  может оказаться достаточно большим. Для выбора из этого множества подходящей последовательности  $seq$  необходимо иметь возможность разумным образом сравнивать результаты обфускации. Заметим, что обфусцирующие преобразования относятся к преобразованиям, сохраняющим семантику программ, к которым принадлежат и оптимизирующие преобразования. Для оптимизирующих преобразований выбор одного из двух  $Opt_1$  и  $Opt_2$  может осуществляться, например, так: если для программы  $P$  размер программы  $Opt_1(P)$  меньше минимума размеров  $P$  и  $Opt_2(P)$ , то наилучшим считается  $Opt_1$ ; аналогично выбор может быть сделан в пользу  $Opt_2$  (в остальных случаях преобразования  $Opt_1$  и  $Opt_2$  не могут рассматриваться как оптимизирующие для  $P$ ). В случае аналогичного выбора одного из двух обфусцирующих преобразований ( $Obf_1$  или  $Obf_2$ ) следует определить количественную характеристику программ, описывающую «понимаемость» этих программ аналитиком. С помощью такой характеристики появляется возможность оценки *эффективности* обфусцирующих преобразований (насколько такие преобразования запутывают код) и *стойкости* этих преобразований по отношению к деобфускатору  $D$  (насколько код поддается распутыванию деобфускатором  $D$ ). Считается (см. например, [7]), что чем меньше размер программы, тем она читабельнее. Если предположить, что из читабельности программы вытекает ее понимаемость, то можно ввести определение понимаемости программы  $P$  следующим образом. Пусть  $\mathbf{P}$  – множество программ, получаемых из  $P$  преобразованиями, сохраняющими семантику  $P$ ,  $P_0$  – *наименьшая* по размеру программа из  $\mathbf{P}$ ,  $s(P, Q)$  – функция похожести, определенная на множестве пар программ, областью значений которой является отрезок  $[0, 1]$ , где 0 соответствует полному совпадению в синтаксисе и поведении программ  $P$  и  $Q$ , а 1 – их полному различию. Тогда  $s$ -понимаемостью программы  $P$  назовем величину  $s(P, P_0)$ . В рамках этого определения, задача выбора наиболее эффективного обфусцирующего преобразования будет решаться так:  $Obf_1$  будет  $s$ -эффективнее  $Obf_2$ , если  $s(Obf_1(P), P_0) > \max\{s(P, P_0), s(Obf_2(P), P_0)\}$ . Задача выбора среди этих же преобразований наиболее стойкого по отношению к деобфускатору  $D$  решается так:  $Obf_1$  является  $(s, D)$ -устойчивее  $Obf_2$ , если  $s(D(Obf_1(P)), P_0) > s(D(Obf_2(P)), P_0)$ . Заметим, что вместо самой короткой программы  $P_0$ , как самой понимаемой, может использоваться любое другое определение самой понимаемой программы  $P_0$ . Например, такой программой может быть программа из  $\mathbf{P}$  с наименьшим временем символического исполнения, так как такое исполнение иногда рассматривается как модель динамического исследования программы аналитиком-человеком [8]. Однако, как нахождение самой короткой программы, так и нахождение программы с наименьшим временем символического исполнения, являются вычислительно сложными задачами. Поэтому здесь вместо  $P_0$  предлагается использовать ее аппроксимацию  $A(P_0)$ . (Аналогичный подход применяется в [9], где при количественной оценке эффективности обфусцирующих преобразований Java-программ для невычислимой колмогоровской сложности программы применяется ее аппроксимация результатом сжатия программы.) В этом случае преобразование  $Obf_1$  будет

считаться  $s$ -эффективнее  $Obf_2$ , если  $s(Obf_1(P), A(P_0)) > \max\{s(P, A(P_0)), s(Obf_2(P), A(P_0))\}$ , и  $(s, D)$ -устойчивее  $Obf_2$  по отношению к  $D$ , если  $s(D(Obf_1(P)), A(P_0)) > s(D(Obf_2(P)), A(P_0))$ . В частности, для самой короткой программы аппроксимацией может быть  $OptSize(P)$  – результат оптимизации *размера* программы  $P$ , а для программы с наименьшим временем символьного исполнения – программа  $SE(P)$ , с наименьшим временем символьного исполнения среди программ, полученных из  $P$  для разных опций оптимизации. Несмотря на разнообразие подходов к сравнению бинарных данных (см. [10]), в работе используется разработанный авторами в [11] подход статического вычисления похожести файлов с использованием методов машинного обучения на универсальных и специализированных характеристиках бинарных исполнимых файлов. Использование этой функции сравнения позволяет оценивать эффективность и стойкость преобразований, примененных на любом из уровней.

### Библиографический список

1. Варновский, Н. П. Современное состояние исследований в области обфускации программ: определения стойкости обфускации / Н. П. Варновский, В. А. Захаров, Н. Н. Кузюрин, А. В. Шокуров // Труды Института системного программирования РАН. – 2014. – Т. 26(3). – С. 167–198. – DOI: 10.15514/ISPRAS-2014-26(3)-9.
2. Barak, B. On the (im) possibility of obfuscating programs / B. Barak, O. Goldreich, R. Impagliazzo, S. Rudich, A. Sahai, S. Vadhan, K. Yang // Journal of the ACM (JACM). – 2012. – V. 59 (2). – DOI: 10.1145/2160158.2160159.
3. Zobernig, L. Mathematical Aspects of Program Obfuscation / L. Zobernig: дис. – ResearchSpace@ Auckland, 2020.
4. Garg, S. Candidate indistinguishability obfuscation and functional encryption for all circuits. / S. Garg, C. Gentry, S. Halevi, M. Raykova, A. Sahai, B. Waters // SIAM Journal on Computing. – 2016. – V. 45 (3). – DOI: 10.1137/14095772X.
5. Zhou, Y. Information hiding in software with mixed boolean-arithmetic transforms / Y. Zhou, A. Main, Y. X. Gu, H. Johnson // Information Security Applications: 8th International Workshop, WISA 2007, Jeju Island, Korea, August 27-29, 2007, Revised Selected Papers 8. – Springer Berlin Heidelberg, 2007. – V. 4867. – DOI: 10.1007/978-3-540-77535-5\_5.
6. Hands-Free Binary Deobfuscation with gooMBA. Доступно в Интернете: <https://hex-rays.com/blog/deobfuscation-with-goomba/> (дата обращения: 28.02.2023).
7. Gulwani, S. Program synthesis / S. Gulwani, O. Polozov, R. Singh // Foundations and Trends in Programming Languages. – 2017. – V. 4(1–2). – DOI: 10.1561/25000000010.
8. Борисов, П. Д. О характеристиках символьного исполнения в задаче оценки качества обфусцирующих преобразований / П. Д. Борисов, Ю. В. Косолапов // Модел. и анализ информ. систем. – 2021. – Т. 28 (1). С. 38–51. – DOI: 10.18255/1818-1015-2021-1-38-51.
9. Mohsen, R. Quantitative measures for code obfuscation security / R. Mohsen // Doctoral dissertation, Imperial College London. – 2016. – DOI: 10.25560/55180.
10. Haq, I. U. A survey of binary code similarity / I. U. Haq, J. Caballero // ACM Computing Surveys (CSUR). – 2021. – V. 54 (3). – DOI: 10.1145/3446371.
11. Борисов, П. Д. Способ оценки похожести программ методами машинного обучения / П. Д. Борисов, Ю. В. Косолапов // Труды Института системного программирования РАН. – 2022. – Т. 34(5). – С. 63–76. – DOI: 10.15514/ISPRAS-2022-34(5)-4.

### Информация об авторах

**Борисов Петр Дмитриевич** – заведующий лабораторией ФГАНУ НИИ «Спецвузавтоматика». E-mail: borisovpetr@mail.ru.

**Косолапов Юрий Владимирович** – канд. техн. наук, доцент кафедры алгебры и дискретной математики института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета. E-mail: itaim@mail.ru.

## РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА КВАНТОВОГО ФАКТОРИНГА ШОРА

В. В. Борисова<sup>1</sup>, Д. В. Дегтярев<sup>1</sup>, А. Г. Макаров<sup>1,3</sup>, К. С. Солдатов<sup>1,3</sup>, К. В. Нефедев<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Департамент информационной безопасности ИМКТ ДВФУ, Владивосток

<sup>2</sup>Департамент теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТиПМ ДВФУ, Владивосток

<sup>3</sup>Институт Прикладной Математики ДВО РАН, Владивосток

**Аннотация.** Квантовый алгоритм Шора – это алгоритм факторизации целых чисел на квантовых компьютерах, который позволяет быстро разложить большие числа на их простые множители. Этот алгоритм является одним из наиболее известных примеров использования квантовых вычислений для решения задач, для которых классические алгоритмы имеют высокую вычислительную сложность. В данной работе описан принцип работы квантового алгоритма Шора и его применение в различных задачах. Также рассмотрено, как этот алгоритм может быть реализован на квантовых компьютерах и какие вычислительные ресурсы необходимы для его выполнения.

**Ключевые слова:** квантовые вычисления, алгоритм Шора, факторизация чисел, простые множители, вычислительная сложность

## IMPLEMENTATION OF THE SHORE QUANTUM FACTORING ALGORITHM

V. V. Borisova<sup>1</sup>, D. V. Degtiarev<sup>1</sup>, A. G. Makarov<sup>1,3</sup>, K. S. Soldatov<sup>1,3</sup>, K. V. Nefedev<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics and Computer Technology, Far Eastern Federal University, Vladivostok

<sup>2</sup>Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University, Vladivostok

<sup>3</sup>Institute of Applied Mathematics Far Eastern Branch, Russian Academy of Science, Vladivostok

**Abstract.** Shor's quantum algorithm is an algorithm for factoring integers on quantum computers, which allows you to quickly decompose large numbers into their prime factors. This algorithm is one of the most well-known examples of using quantum computing to solve problems for which classical algorithms have high computational complexity. This paper describes the principle of operation of the Shor's quantum algorithm and its application in various tasks. It also discusses how this algorithm can be implemented on quantum computers and what computational resources are required for its execution.

**Key words:** quantum computing, Shor's algorithm, factorization of numbers, prime factors, computational complexity

Алгоритм квантового факторинга Шора является одним из наиболее известных алгоритмов квантовых вычислений. Он был разработан в 1994 году Питером Шором и позволяет на квантовом компьютере эффективно разложить целое число на простые множители. Этот алгоритм имеет большое практическое значение, так как разложение чисел на простые множители является фундаментальной операцией в криптографии [1].

Основная идея алгоритма Шора заключается в том, чтобы использовать квантовые вычисления для периодической функции, связанной с целым числом, которое мы хотим разложить на простые множители. Для этого сначала создается квантовый регистр, содержащий суперпозицию всех возможных значений, которые может принимать периодическая функция. Затем применяется преобразование Фурье к этому регистру, позволяющее выделить пе-



риод функции. Этот период может быть использован для определения множителей числа, которое мы хотим разложить.

Важно отметить, что алгоритм Шора требует использования квантового компьютера, так как классические компьютеры не могут выполнять такие операции за оптимальный период времени. Несмотря на то, что существуют ограничения на размер квантовых компьютеров, которые в настоящее время доступны, наличие алгоритма Шора позволяет решать некоторые задачи, которые ранее были недоступны.

Одним из возможных применений алгоритма Шора является взлом криптографических систем, которые используются для защиты информации. Например, многие современные криптографические системы используют RSA-шифрование, которое основывается на сложности факторизации больших целых чисел. Если квантовый компьютер достаточно большой, то он может эффективно взломать RSA-шифрование, что может привести к серьезным последствиям для безопасности информации [2].

Алгоритм Шора также имеет важное значение для теоретических исследований. В частности, он помогает установить связь между классом задач, которые могут быть решены на квантовом компьютере, и классом задач, которые могут быть решены на классическом компьютере. Эта связь известна как гипотеза Берланда-Кассини-Ландауэра, которая утверждает, что квантовый компьютер может решить задачи, которые классический компьютер не может решить в разумное время.

В ходе исследования было разложено число 15 на простые множители при помощи алгоритма Шора на собственном написанном симуляторе квантового компьютера на языке Python. Сначала было подготовлено состояние кубитов в соответствии с алгоритмом Шора, затем был проведен измерительный процесс, который позволил получить необходимые данные для расчета разложения [3, 4].

Измерение кубитов – это процесс, в котором квантовый компьютер переходит в различные квантовые состояния с определенными вероятностями, и результаты измерений вероятностей этих состояний позволяют вычислить период функции, который используется для факторизации числа на простые множители. Измеренные состояния кубитов – это состояния, которые получаются в результате измерения кубитов. В квантовой схеме алгоритма Шора, изображенной на рис. 1, кубиты инициализируются, затем используется модульная функция возведения в степень, обратное квантовое преобразование Фурье и измерение кубитов. Результаты измерений на рис. 2 показывают распределение вероятностей измеренных состояний кубитов после запуска схемы. По оси абсцисс на рис. 2 отложены значения состояний кубитов, а по оси ординат – вероятности этих состояний. Распределение вероятностей измеренных состояний кубитов на рис. 2 показывает, какие состояния кубитов были получены в результате измерения и с какой вероятностью.

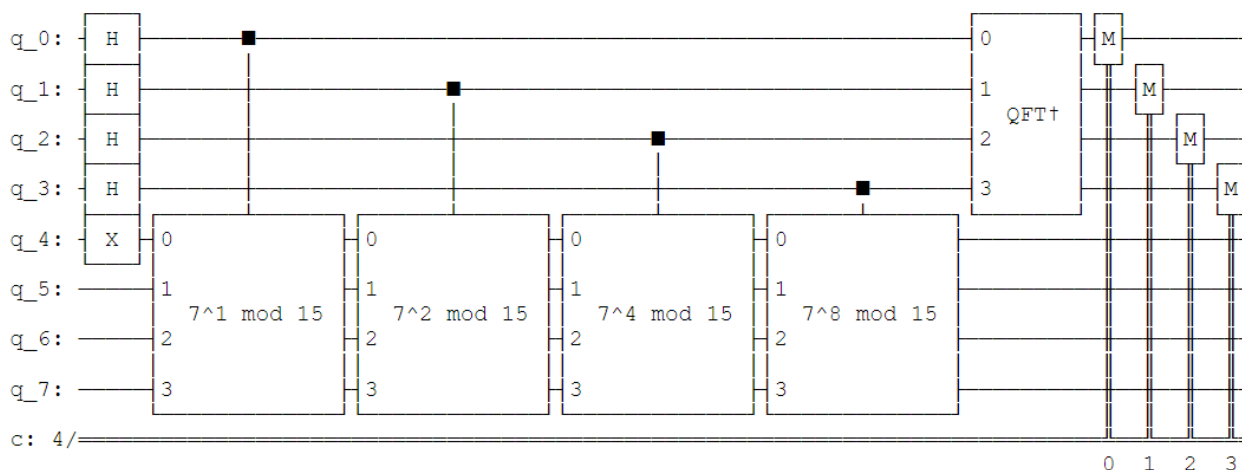


Рисунок 1 – Квантовая схема реализации алгоритма Шора

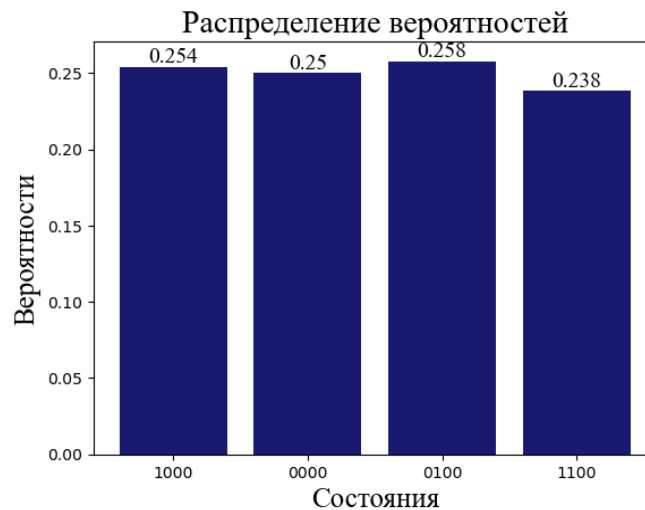


Рисунок 2 – Результаты измерений

Однако на практике результаты измерений на квантовом компьютере могут быть сильно зашумлены, что может привести к неверным результатам при использовании алгоритма Шора. Поэтому квантовые компьютеры, способные выполнять алгоритм Шора, на данный момент являются объектом исследований в области квантовых вычислений и не используются в промышленности.

Результаты исследования подтверждают эффективность алгоритма квантового факторинга Шора на практике. Данный алгоритм может быть применен для разложения больших чисел на простые множители, что является невозможным для классических компьютеров.

В дальнейшем планируется провести дополнительные исследования и разработки, связанные с алгоритмом квантового факторинга Шора. Одной из задач является увеличение количества кубитов на квантовом компьютере, что позволит расширить возможности использования алгоритма. Также, планируется оптимизировать процессы подготовки состояния кубитов и измерения, чтобы снизить вероятность ошибок в расчетах и повысить эффективность алгоритма. Кроме того, возможны исследования и разработки, связанные с применением алгоритма квантового факторинга Шора в различных областях. Например, можно исследовать возможность применения алгоритма в криптографии для создания новых методов шифрования и дешифрования, которые будут устойчивы к атакам с использованием квантовых компьютеров.

### Библиографический список

1. Сысоев, С. С. Введение в квантовые вычисления. Квантовые алгоритмы: учеб. пособие / С. С. Сысоев // СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. – 2019.
2. Ugwuishiwu, C. H. An overview of quantum cryptography and shor's algorithm / C. H. Ugwuishiwu et al // Int. J. Adv. Trends Comput. Sci. Eng. – 2020. – Т. 9. – №. 5.
3. Вахний, Т. В. Выполнение простейших вычислений на квантовом компьютере IBM Q System One / Т. В. Вахний, А. К. Гуц, А. В. Овчинников // М340 Математическое и компьютерное моделирование: сборник. – 2021. – С. 328.
4. Малков, А. В. Моделирование квантовых вычислений с использованием эмулятора Qiskit для языка python. – 2022.

### Благодарности

Исследование проводилось в рамках гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2559.2022.1.2).

### **Информация об авторах**

**Борисова Влада Владимировна** – студент 2-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: borisova.vvl@students.dvfu.ru.

**Дегтярев Данил Викторович** – студент 1-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: degtyarev.dv@students.dvfu.ru.

**Макаров Александр Геннадьевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент департамента информационной безопасности ИМКТ ДВФУ, научный сотрудник ИПМ ДВО РАН. E-mail: makarov.ag@dvfu.ru.

**Солдатов Константин Сергеевич** – доцент департамента информационной безопасности ИМКТ ДВФУ, и.о. заведующего лабораторией вычислительной информатики ИПМ ДВО РАН. E-mail: soldatov\_ks@dvfu.ru.

**Нефедев Константин Валентинович** – д-р физ.-мат. наук, профессор, директор департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТиПМ ДВФУ, ведущий научный сотрудник ИПМ ДВО РАН. E-mail: nefedev.kv@dvfu.ru.

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФфуЗИОННО-ДРЕЙФОВОЙ МОДЕЛИ ЗАРЯДКИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯРНОГО ДИЭЛЕКТРИКА

Р. В. Бризицкий<sup>1,2</sup>, Н. Н. Максимова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

<sup>2</sup>*Дальневосточный центр математических исследований Дальневосточного федерального университета, Владивосток*

<sup>3</sup>*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** Исследуется задача мультипликативного управления для модели электронно-индуцированной зарядки неоднородного полярного диэлектрика, роль управления в которой играет старший коэффициент в уравнении модели. Для указанной задачи выводится система оптимальности, на основе анализа которой устанавливаются достаточные условия локальной единственности оптимального решения.

**Ключевые слова:** модель дрейфа-диффузии электронов, модель зарядки неоднородного полярного диэлектрика, задача мультипликативного управления, система оптимальности, локальная единственность системы оптимальности

## ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF MULTIPLICATIVE CONTROL FOR THE DIFFUSION-DRIVE MODEL OF THE CHARGING OF AN INHOMOGENEOUS POLAR DIELECTRIC

R. V. Brizitskii<sup>1,2</sup>, N. N. Maksimova<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok*

<sup>2</sup> *Far Eastern Center for Mathematical Research, Far Eastern Federal University, Vladivostok*

<sup>3</sup>*Amur State University, Blagoveshchensk*

**Abstract.** The problem of multiplicative control for the model of electronically induced charging of an inhomogeneous polar dielectric, in which the control role is played by the senior coefficient in the equation of the model, is investigated. For this problem, an optimality system is derived, based on the analysis of which sufficient conditions for the local uniqueness of the optimal solution are established.

**Key words:** electron drift-diffusion model, charging model of an inhomogeneous polar dielectric, multiplicative control problem, optimality system, local uniqueness optimality system

В междисциплинарных исследованиях в настоящее время активно исследуются процессы типа «адвекция-реакция-диффузия» или «конвекция-реакция-диффузия». Формализация моделей конвективно-реакционно-диффузионных процессов приводит к начальнo-граничным задачам для уравнений с частными производными параболического типа в неустановившихся режимах или к краевым задачам для уравнений эллиптического типа в случае описания стационарных состояний.

К математическим моделям данного типа относится диффузионно-дрейфовая модель процесса зарядки диэлектриков в неравновесных внешних условиях. Важнейшей частной задачей является применение диффузионно-дрейфового подхода для моделирования процесса зарядки полярных диэлектриков, индуцированного электронным облучением. При этом если облучение материала поддерживается длительное время (на практике достаточно и доли се-

кунды), то этого времени оказывается достаточно для перехода системы динамического состояния в стационарное.

Поэтому особую актуальность для практики приобретает детальное исследование математических моделей, описывающих стационарные режимы процессов зарядки.

Математическая модель процесса зарядки неоднородного полярного диэлектрика может быть представлена следующей краевой задачей, рассматриваемой, рассматриваемой в ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ :

$$-\operatorname{div}(d\nabla\rho) + \mu_n \mathbf{E} \cdot \nabla\rho + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} \beta |\rho| \rho = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\rho = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $\mathbf{E}$  – вектор-функция напряженности электрического поля,  $d(\mathbf{x}) > 0$  – коэффициент диффузии электронов,  $\mu_n$  – дрейфовая подвижность электронов,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость материала,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $f$  – генерационное слагаемое, отвечающее за действие объемного источника зарядов в объекте,  $\beta(\mathbf{x}) > 0$  – нормализованный коэффициент потери заряда. Ниже на задачу (1)-(3) будем ссылаться как на задачу 1.

Глобальная разрешимость и локальная единственность решения задачи 1 при  $\beta \equiv 1$  доказаны в [4], здесь же установлен принцип максимума для плотности заряда.

В данной работе результаты [4] обобщены на случай, когда коэффициент  $\beta$  не является константой, и исследуется задача мультипликативного управления для задачи 1. Роль управления играет функция  $d$ , которая может изменяться в выпуклом замкнутом множестве  $K$ . Для постановки экстремальной задачи введем следующие функциональные пространства:

$$H_N^1(\Omega) = \{ \mathbf{h} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{h} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \}, \quad \tilde{H}_N^1(\Omega) = H_N^1(\Omega) \cap \ker(\operatorname{rot}),$$

функциональное множество

$$H_{d_0}^s(\Omega) = \{ h \in H^s(\Omega) : h \geq d_0 > 0 \text{ п.в. в } \Omega \}, \quad s \geq 0,$$

где  $d_0$  – положительная константа, и произведение пространств

$$X = H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega), \quad Y = H^{-1}(\Omega) \times L_2(\Omega).$$

Задача управления заключается в минимизации слабо полунепрерывного снизу функционала  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  на слабых решениях задачи 1:

$$J(\mathbf{x}, d) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|d\|_{s,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, d) = 0, \quad (\mathbf{x}, d) \in X \times K, \quad s > 3/2. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (\rho, \mathbf{E}) \in X$ , оператор  $F = (F_1, F_2) : X \times K \rightarrow Y$  по формулам:

$$\langle F_1(\mathbf{x}, d), h \rangle = (d\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n (\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} (|\rho|\rho, h) - (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),$$

$$F_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega,$$

при этом операторное уравнение  $F(\mathbf{x}, d) = 0$  является формой записи слабой формулировки задачи 1,  $\mu_0 > 0, \mu_1 \geq 0$  и  $K$  – ограниченное множество  $K \subset H_{d_0}^s(\Omega)$ ,  $s > 3/2$ .

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2, \quad I_2(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_Q^2. \quad (5)$$

Здесь  $\rho^d \in L^2(Q)$  обозначает заданное поле концентрации в подобласти  $Q \subset \Omega$ . Функция  $\mathbf{E}^d$  имеет аналогичный смысл для электрического поля.

Разрешимость задачи (4) при  $\beta \equiv 1$  доказана в [5]. В настоящей работе доказывается разрешимость задачи (4) в общем случае, выводятся системы оптимальности, на основе анализа которых устанавливаются достаточные условия локальной единственности оптимального решения.

В заключение отметим, что в рамках оптимизационного подхода к рассматриваемой задаче мультипликативного управления может быть сведена обратная задача восстановления коэффициента  $d$  по дополнительной информации о решении задачи 1 (см. [6]).

### Библиографический список

1. Chan, D. S. H. A simulation model for electron irradiation induced specimen charging in a scanning electron microscope / D. S. H. Chan, K. S. Sim, J. C. H. Phang // Scanning spectroscopy. – 1993. – V. 7. – № 31. – P. 847–859.
2. Maslovskaya, A. G. Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain structure switching / A. G. Maslovskaya // Journal of Surface Investigation. – 2013. – V. 7 (4). – P. 680–684.
3. Pavelchuk, A. V. Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source / A. V. Pavelchuk, A. G. Maslovskaya // Russian Physics Journal. – 2020. – V. 63. – P. 105–112. – DOI: 10.1007/s11182-020-02008-4.
4. Бризицкий, Р. В. Теоретический анализ и численная реализация стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярных диэлектриков / Р. В. Бризицкий, Н. Н. Максимова, А. Г. Масловская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62. – № 10. – С. 1696–1706. – DOI: 10.31857/S0044466922100039.
5. Maksimova, N. N. Inverse problem of recovering the electron diffusion coefficient / N. N. Maksimova, R. V. Brizitskii // Дальневосточный математический журнал. – 2022. – Т. 22. – № 2. – С. 201–206. – DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202226>.
6. Brizitskii, R. V. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation / R. V. Brizitskii, Zh. Yu. Saritskaya // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2018. – V. 26. – № 6. – P. 821–833. – DOI: 10.1515/jiip-2017-0011.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках НИОКТР номер: АААА-А20-120120390006-0 ИПМ ДВО РАН и при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 122082400001-8 и проект № 075-02-2023-946).

### Информация об авторах

**Бризицкий Роман Викторович** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с. Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: mlnwizard@mail.ru.

**Максимова Надежда Николаевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, и.о. заведующего кафедрой математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: knnamursu@mail.ru.

## КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. В. Бризицкий<sup>1,2</sup>, Ж. Ю. Сарискайя<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

<sup>2</sup>Амурский государственный университет, Благовещенск

**Аннотация.** Исследуются краевые и экстремальные задачи для уравнения реакции-диффузии-конвекции, в котором коэффициенты реакции и диффузии нелинейно зависят от концентрации вещества, а также зависят от пространственных переменных. Одним из основных результатов является доказательство разрешимости задач управления на слабых решениях краевой задачи и на сильных решениях при меньшей гладкости управления.

**Ключевые слова:** уравнение реакции-диффузии-конвекции, слабое решение, принцип максимума, сильное решение, локальная единственность, задача управления

## BOUNDARY VALUE AND EXTREMUM PROBLEMS FOR REACTION-DIFFUSION-CONVECTION EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

R. V. Brizitskii<sup>1,2</sup>, Zh. Yu. Saritskaia<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok

<sup>2</sup>Amur State University, Blagoveshchensk

**Abstract.** Boundary and extremum problems are studied for the reaction-diffusion-convection equation, in which reaction and diffusion coefficients depend nonlinearly on the concentration of substance, and also depend on spatial variables. One of the main results is the proof of the solvability of control problems on weak solutions of the boundary value problem and on strong solutions for less smooth control.

**Key words:** reaction-diffusion-convection equation, weak solution, maximum principle, strong solution, local uniqueness, control problem

В ограниченной области  $\Omega \in \mathbf{R}^3$  с границей  $\Gamma$  рассматривается следующая краевая задача:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\varphi, \mathbf{x}) \nabla \varphi) + k(\varphi, \mathbf{x}) \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = f \quad \text{в } \Omega, \quad \varphi = \psi \quad \text{на } \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация вещества,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $\lambda(\varphi, \mathbf{x}) > 0$  – коэффициент диффузии,  $k(\varphi, \mathbf{x}) > 0$  – коэффициент реакции, где  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f$  – объемная плотность источников вещества.

В настоящей работе доказано глобальное существование слабого решения задачи (1) и установлен принцип максимума и минимума для концентрации  $\varphi$ . Для коэффициента реакции  $k$  используется операторная конструкция, как и в более ранних работах (см. [1,2]). Коэффициент диффузии имеет следующий вид:

$$\lambda(\varphi, \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) \lambda_1(\varphi) + \beta(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где  $\lambda_1(\tau)$  – непрерывная функция,  $\tau \in \mathbf{R}^3$ .

В случае более гладкой границы  $\Gamma \in C^2$  доказано локальное существования сильного решения задачи (1). С этой целью применялись различные методы, один из которых использует ограниченность коэффициента реакции в  $L^p$ -норме, где  $p \geq 2$ , как в [3]. В основе другого метода лежит принцип максимума, установленный в настоящей работе для слабого решения  $\varphi \in H^1(\Omega)$  задачи (1) для коэффициентов реакции более общего вида, чем в [2] и [3]. Как и в

[3], в настоящей работе доказана единственность малого по  $H^2$ -норме сильного решения задачи (1). При этом установлено, насколько должна быть мала указанная норма:  $\|\ddot{u}\| \leq M^{\dot{a}}$ .

Для задачи (1) формулируется и исследуется задача мультипликативного управления, роль управления, роль управления в которой играет функция  $\dot{a}$  из (2). Сначала доказывается разрешимость задачи управления на слабых решениях задачи (1). При этом требования на гладкость управления достаточно высоки:  $\dot{a} \in H^s(\dot{U})$ ,  $\dot{a} > 3/2$ . Далее разрешимость задачи управления доказывается на сильных решениях краевой задачи, что позволяет снизить требование на управление:  $\dot{a} \in L^\infty(\dot{U})$ . Отсутствие требования  $H^s$ -гладкости, где  $s > 0$ , делает управление более ценным с прикладной точки зрения, так как допускает его релейность (см. [4]). Так же отметим, что гладкость сильного решения позволяет использовать более очевидные условия на старший коэффициент, например, непрерывность по Липшицу.

### Библиографический список

1. Brizitskii, R. V. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation / R. Brizitskii, Z. Saritskaya // J. Inv. Ill-Posed Probl. – 2018. – V. 9. – P. 821–834. – DOI: 10.1515/jiip-2017-0011.
2. Brizitskii, R. V. Multiplicative control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model / R. V. Brizitskii, Z. Saritskaia // J. Dynam. Control Syst. – 2021. – V. 27 (2) – P. 379–402. – DOI: 10.1007/s10883-020-09508-z.
3. Alekseev, G. V. Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Bousinesq model of mass transfer with variable coefficients / G. Alekseev, R. Brizitskii // Symmetry. – 2022 – V. 14 (22) – Article ID 2580. – DOI: 10.3390/sym14122580.
4. Бризицкий, Р. В. Теоретический анализ краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции-диффузии-конвекции / Р. В. Бризицкий, В. С. Быстрова, Ж. Ю. Сарицкая // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57. – № 5. – С. 615–629. – DOI: 10.31857/S037406412105006X.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках НИОКТР номер: АААА-А20-120120390006-0 ИПМ ДВО РАН и при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 122082400001-8 и проект № 075-02-2023-946).

### Информация об авторах

**Бризицкий Роман Викторович** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с. Института прикладной математики ДВО РАН, E-mail: mlnwizard@mail.ru.

**Сарицкая Жанна Юрьевна** – инженер-исследователь Института прикладной математики ДВО РАН, E-mail: zhsar@icloud.com.



## НАСТРОЙКА СЕТОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ 2D МОДЕЛИ ЛАНДАУ – ХАЛАТНИКОВА В COMSOL MULTIPHYSICS

Е. М. Веселова

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** В работе исследован вопрос настройки управляющих параметров, позволяющих контролировать сеточную сходимость и обеспечить устойчивость численного решения прикладных задач методом конечных элементов в среде COMSOL Multiphysics. В качестве приложения рассмотрены режимы управления сеточными параметрами при реализации 2D модели Ландау – Халатникова для описания формирования сегнетоэлектрических доменных структур.

**Ключевые слова:** модель Ландау – Халатникова, вычислительный эксперимент, COMSOL Multiphysics, конечно-элементная сетка, сеточная сходимость

## SETTING UP GRID PARAMETERS FOR NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE 2D LANDAU-KHALATNIKOV MODEL IN COMSOL MULTIPHYSICS

E. M. Veselova

Amur State University, Blagoveshchensk

**Abstract.** In this work, the issue of setting control parameters is examined to control the grid convergence and the stability of applied problems numerically solved by the finite element method using the COMSOL Multiphysics. As an application, the modes of control of grid parameters are considered to implement the 2D Landau – Khalatnikov model applied for modelling the formation of ferroelectric domain structures.

**Key words:** Landau – Khalatnikov model, computational experiment, COMSOL Multiphysics, finite element mesh, mesh convergence

В настоящее время одной из эффективных платформ для компьютерного моделирования систем из различных прикладных областей является программная среда COMSOL Multiphysics. Независимо от постановки и сложности задачи используется единый инструментарий и настройки платформы COMSOL для инициализации параметров модели. Основным численным методом, используемым в программе, является метод конечных элементов. Одним из важных этапов моделирования в среде COMSOL является построение специализированной конечно-элементной сетки для получения высокоточных результатов для конкретной задачи. Исследование сеточной сходимости в COMSOL подразумевает оценку зависимости результатов от характеристик и размеров сеточной последовательности, а также поиск конфигурации сетки, позволяющей получить корректные значения искомых величин.

В работе [1] рассмотрено приложение модели Ландау – Гинзбурга для исследования свойств сегнетоэлектриков. В работах [2, 3] рассмотрены численные аспекты реализации модели переключения поляризации, выполнено компьютерное моделирование сегнетоэлектрического гистерезиса на основе подходов классической термодинамической теории. Теоретический анализ модели представлен в работе [2], в которой исследованы вопросы существования и единственности слабого решения начально-краевой задачи для уравнения Ландау – Халатникова, соответствующей 1D модели. В настоящей работе выполнен анализ условий практической сеточной сходимости решения задачи моделирования конфигураций доменов типичных сегнетоэлектриков на основе 2D модели Ландау – Халатникова.

Математическая модель Ландау – Халатникова формализована в виде начально-краевой задачи с периодическими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_x}{\partial t} = D \cdot \Delta P_x + a P_x + b_1 P_x^3 - b_2 P_x P_y^2 - c_1 P_x^5 - c_2 P_x P_y^4 - c_3 P_x^3 P_y^2 \\ \frac{\partial P_y}{\partial t} = D \cdot \Delta P_y + a P_y + b_1 P_y^3 - b_2 P_x^2 P_y - c_1 P_y^5 - c_2 P_x^4 P_y - c_3 P_x^2 P_y^3 \end{cases}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < L, \quad 0 < t \leq t_{ob}, \quad (1)$$

$$P_x|_{t=0} = P_{x0}(x, y), \quad P_y|_{t=0} = P_{y0}(x, y), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L, \quad (2)$$

$$P_x|_{x=0} = P_x|_{x=L}, \quad P_y|_{x=0} = P_y|_{x=L}, \quad 0 < y < L, \quad P_x|_{y=0} = P_x|_{y=L}, \quad P_y|_{y=0} = P_y|_{y=L}, \quad 0 < x < L, \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=L}, \quad \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{y=0} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{y=L}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{P}(P_x, P_y)$  – поляризация;  $D$  – коэффициент диффузии;  $L$  – линейный размер образца;  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  – положительные постоянные;  $t_{ob}$  – время наблюдения;  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к границе области.

Численное решение задачи (1)–(4) выполнено в программной среде COMSOL Multiphysics V5.0 методом конечных элементов с использованием универсального математического PDE-интерфейса (Coefficient Form PDE). Проведена серия вычислительных экспериментов в нормированных величинах на примере типичного сегнетоэлектрика титаната бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) [4]. Для выполнения расчетов инициализированы следующие параметры модели:  $L=68$ ,  $D=1$ ,  $a=1$ ,  $b_1=3.84$ ,  $b_2=0.92$ ,  $c_1=5.97$ ,  $c_2=0.09$ ,  $c_3=0.18$  (безразмерные параметры получены с помощью процедуры нормировки физических параметров). Начальное состояние системы – равномерное случайное распределение поляризации.

Решением начально-краевой задачи (1)–(4) является пространственно-временное распределение поляризации в области решения, представляющей собой срез по толщине образца. Примеры проекции данного распределения в фиксированный момент времени на координатную плоскость ( $xOy$ ) при комнатной температуре показаны на рис. 1. Фон рисунков соответствует распределению модуля вектора поляризации. Также на рисунках представлена конечно-элементная сетка, сгенерированная для проведения расчетов.

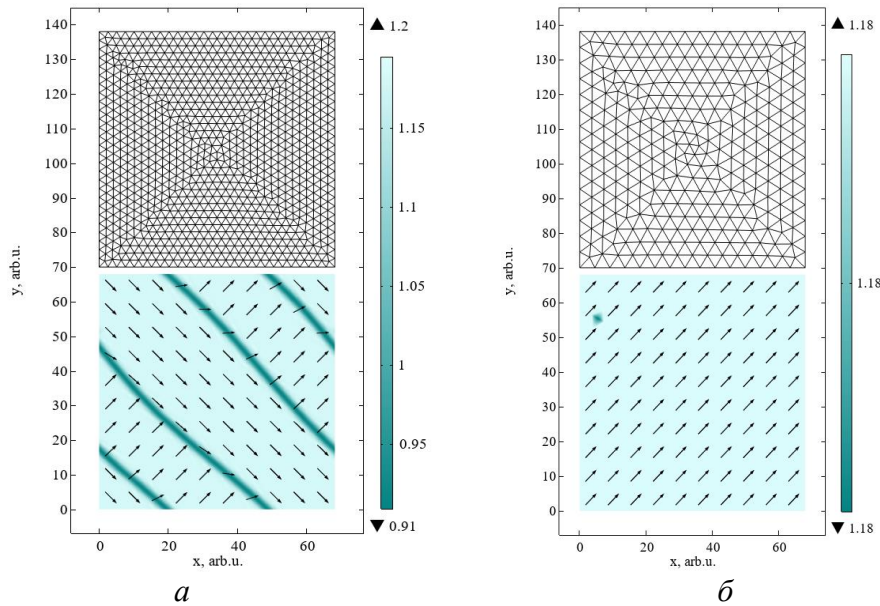


Рисунок 1 – Доменная структура в момент времени  $t = 1000$  отн. ед.: на сетке типа Finer – (a), на сетке типа Normal – (б)

Результаты вычислительных экспериментов (рис. 1) указывают на существенную зависимость визуализации доменной структуры от характеристик конечно-элементной сетки.

При настройках сетки типа *Finer* с минимальным размером элемента 2.52 наблюдается характерная для титанана бария  $\text{BaTiO}_3$  многодоменная  $90^\circ$  паркетная структура при использовании периодических граничных условий для обеих компонент поляризации, что согласуется с данными, полученными авторами работы [5]. Для конечно-элементной сетки с размером элемента 4.56 типа *Normal* данной структуры не наблюдается.

Расчет компонент поляризации в центральной точке рассматриваемой области позволяет оценить время достижения равновесного состояния физической системы (рис. 2).

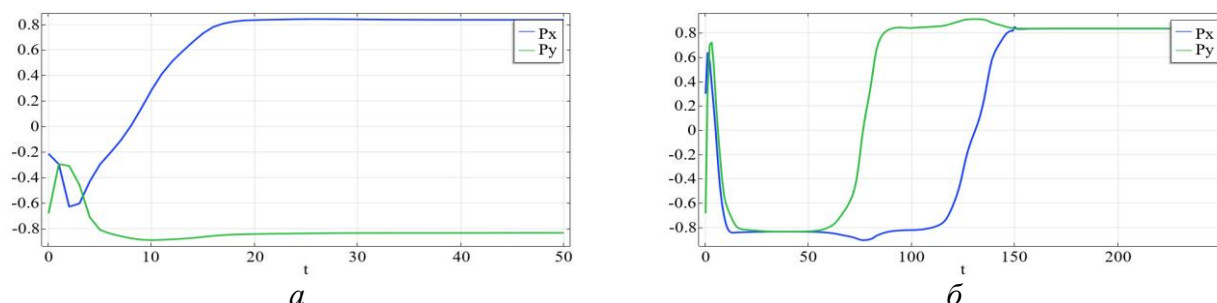


Рисунок 2 – Изменение значений компонент вектора поляризации в центральной точке расчетной области: на сетке типа *Finer* – (а), на сетке типа *Normal* – (б)

Численные результаты на рис. 2 демонстрируют достаточно быстрый переход поляризации в равновесное состояние при использовании для расчета сетки типа *Finer* ( $t \approx 20$  отн. ед.) по сравнению с сеткой типа *Normal* ( $t \approx 150$  отн. ед.).

Таким образом, численное моделирование показало существенную зависимость полученных результатов от типа конечно-элементной сетки. Среда COMSOL Multiphysics предоставляет эффективные инструменты реализации модели и позволяет регулировать специализированные параметры сетки для получения качественных результатов состояния физической системы в предельных режимах.

### Библиографический список

1. Wang, C. L. Switching characters of asymmetric ferroelectric films / C. L. Wang, L. Zhang, W. L. Zhong, P. L. Zhang // *Physics Letters A*. – 1999. – V. 254(5). – P. 297–300. – DOI: 10.1016/S0375-9601(99)00129-2.
2. Maslovskaya, A. G. Theoretical and numerical analysis of the Landau – Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis / A. G. Maslovskaya, L. I. Moroz, A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2021. – V. 93. – P. 105524 (13). – DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105524.
3. Veselova, E. Size-dependent switching in thin ferroelectric films: mathematical aspects and finite element simulation / E. Veselova, A. Maslovskaya, A. Chebotarev // *Computation*. – 2023. – V. 11 (1). – P. 14. – DOI: 10.3390/computation11010014.
4. *Physics of ferroelectrics: a modern perspective* / K. M. Rabe, C. Ahn, J. M. Triscone. – Springer, Berlin, 2007. – DOI: 10.1007/978-3-540-34591-6.
5. Dattagupta, S. Pattern formation in non-linear reaction-diffusion systems / S. Dattagupta, M. K. Roy // *Indian Academy of Sciences Conference Series*. – 2019. – V. 2(1). – P. 55–58. – DOI: 10.29195/iascs.02.01.0007.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 122082400001-8.

### Информация об авторах

**Веселова Елена Михайловна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: veselova.em@amursu.ru.

## СОСТАВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОДИНАМО МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Г. М. Водинчар, Л. К. Фещенко

*Институт космифизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
Паратунка, Камчатский край*

**Аннотация.** В спектральных моделях геодинамо поля задачи раскладываются по собственным модам свободного затухания. Построение таких моделей требует расчета объемных интегралов (коэффициентов) от сложных мультипликативных комбинаций мод и дифференциальных операторов. Важно выявлять равные нулю коэффициенты, поскольку это дает возможность выявлять цепочки взаимодействующих мод. Это требует автоматизации формирования подынтегральных выражений и самого интегрирования. В докладе представляется технология расчета коэффициентов моделей и параметров базисных мод с помощью систем компьютерной алгебры.

**Ключевые слова:** геодинамо, спектральные модели, компьютерная алгебра, автоматизация разработки моделей

## COMPILATION OF GEODYNAMO SPECTRAL MODELS BY THE COMPUTER ALGEBRA METHODS

G. M. Vodinchar, L. K. Feshchenko

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,  
Paratunka, Kamchatka region

**Abstract.** In the geodynamo spectral models the fields are decomposed in terms of free damping eigenmodes. The construction of such models requires the calculation of volume integrals (coefficients) of complex multiplicative combinations of modes and differential operators. It is important to detect coefficients equal to zero, since this makes it possible to detect chains of interacting modes. This requires automation of the formation of integrands and the integration itself. The report presents a technology for calculating the coefficients of models and parameters of basis modes using computer algebra systems.

**Key words:** geodynamo, spectral models, computer algebra, model development automation

В задаче геодинамо, т.е. магнитогидродинамической конвекции в жидком ядре Земли, поля скорости  $\mathbf{v}$ , температуры  $T$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}$  связываются подходящим образом обезразмеренными нелинейными уравнениями в частных производных [1,2] с начальными и граничными условиями. При численном исследовании часто используют приближенное представление полей задачи в виде разложения по модам:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^L \beta_l(t) \mathbf{v}_l(\mathbf{r}), \quad T(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=1}^S \alpha_s(t) T_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p=1}^P \gamma_p(t) \mathbf{v}_p(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Эти разложения подставляются в исходную систему и применяется стандартная галеркинская процедура проектирования уравнений на подпространства мод. Если в качестве базисных мод используются моды свободного затухания полей, т.е. решения спектральных задач

$$\begin{aligned}
\mu \mathbf{v} - \nabla p + \Delta \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(r = r_i) = \mathbf{v}(r = 1) = 0, \\
\lambda T + \Delta T &= 0, \quad T(r = r_i) = T(r = 1) = 0, \\
\eta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B}(r = 0) < \infty, \quad \text{rot} \mathbf{B}(r = 1) = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

то говорят о спектральной модели геодинамо. Модель включает как динамическую систему для амплитуд в разложениях (1), так и набор самих мод в этих разложениях. Граничные условия в (2) соответствуют условиям для полей задачи геодинамо на внутренней ( $r = r_i$ ) и внешней ( $r = 1$ ) границах жидкого ядра.

Динамическая система для амплитуд имеет квадратично-нелинейный вид с постоянными коэффициентами [2]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta_l}{dt} &= \sum_{i,j=1}^L B_{lij} \beta_i \beta_j - \mu_l \beta_l + E^{-1} \sum_{i=1}^L E_{li} \beta_i + \text{Ra} \text{Pr}^{-1} \sum_{i=1}^S D_{li} T_i + \sum_{i,j=1}^P Q_{lij} \gamma_i \gamma_j, \\
l &= 1, 2, \dots, L, \\
\frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L,S} F_{sij} \beta_i \alpha_j + \sum_{i=1}^L H_{si} \beta_i - \text{Pr}^{-1} \lambda_s \alpha_s, \\
s &= 1, 2, \dots, S, \\
\frac{d\gamma_p}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L,P} W_{pij} \beta_i \gamma_j - \text{Pm}^{-1} \eta_p \gamma_p, \\
p &= 1, 2, \dots, P.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь управляющие параметры:  $E$  – число Экмана,  $\text{Ra}$  – число Релея,  $\text{Pr}$  – число Прандтля,  $\text{Pm}$  – магнитное число Прандтля; положительные числа  $\mu_l$ ,  $\lambda_s$  и  $\eta_p$  – собственные значения мод. Остальные коэффициенты (коэффициенты Галеркина) являются объемными интегралами от очень сложных мультипликативных комбинаций базисных мод и дифференциальных операторов векторного анализа.

Приведем для примера выражения для двух групп коэффициентов:

$$B_{lij} = \iiint_{r_i \leq r \leq 1} ((\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_l dV, \quad W_{pij} = \iiint_{r_i \leq r \leq 1} \mathbf{B}_p \cdot \text{rot}(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_j) dV. \tag{4}$$

Построение спектральной модели требует расчета базисных мод и галеркинских коэффициентов. Геометрия области решения задачи диктует использование сферической системы координат. Именно в этих координатах возможно аналитическое решение спектральных задач (2). Общий вид решений известен (см., например, [2]). Моды выражаются сложным образом через сферические гармоники, сферические функции Бесселя, оператор ротора.

Но и сами подынтегральные выражения в (4) и у других коэффициентов в сферических координатах очень громоздки. А если учесть и сложность выражений самих мод, то становится понятным что получение правильных подынтегральных выражений «вручную» и их безошибочное воспроизведение в программном коде практически невозможны. Эту проблему предлагается решать с помощью систем компьютерной алгебры (computer algebra system – CAS).

Непосредственную реализацию можно вести в любой CAS, однако лучше использовать систему, которая поддерживает все алгебраические и дифференциальные операции векторного анализа в сферических координатах. Например, система Maple, содержит пакет VectorCalculus, содержащий все необходимые функции [3]. Поэтому авторы базировались именно на этой системе. Однако минимальный набор необходимых структур и функций несложно реализовать в любой CAS.

Поэтапно, предлагаемая схема расчетов заключается в следующем.

1) Формируются символьные массивы явных выражений для сферических функций Бесселя и сферических гармоник с помощью стандартных рекуррентных соотношений.

2) Составляются уравнения на собственные значения и аналитические выражения для нормировочных коэффициентов мод. Численно находятся собственные значения и нормировочные коэффициенты.

3) Формируются явные аналитические выражения для мод с буквенными собственными значениями и коэффициентами.

4) Формируются явные аналитические выражения для подынтегральных выражений, являющихся мультипликативными комбинациями мод и операторов векторного анализа.

5) Выполняется аналитическое интегрирование по угловым переменным сферических координат. Это интегрирование даст либо нуль, либо некоторое выражение, зависящее от радиальной переменной, неопределенных собственных значений и нормировочных коэффициентов.

6) В случае ненулевого результата предыдущего пункта выполняется подстановка в выражение найденных ранее численных собственных значений и коэффициентов. Затем выполняется численное интегрирование по радиальной переменной.

Отметим, что CAS по умолчанию используют программную эмуляцию вычислений с плавающей запятой, а не процессорную арифметику. Это позволяет гибко контролировать точность расчетов и выявлять нулевые коэффициенты даже при численном интегрировании.

Также стоит отметить, что каждый галеркинский коэффициент имеет смысл меры некоторого взаимодействия мод. Поэтому точное равенство нулю тех или иных коэффициентов несет важную физическую информацию. Особенно большую роль это играет при построении маломодовых моделей. Сильное усечение количества мод может привести к тому, что модель потеряет важную информацию об исходной системе. Тогда придется менять набор мод и пересчитывать коэффициенты.

Поэтому предлагаемые технологии формирования алгебраических выражений мод, расчета их параметров, формирования подынтегральных выражений, интегрирования (по возможности – аналитического) позволит сильно упростить разработку спектральных моделей. Почеркнем, что речь идет не о численном исследовании готовой модели, а именно о процедуре ее построения.

### **Библиографический список**

1. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle / R.T. Merrill, M.W. McElhinny, P.L. McFadden – London: Academic Press, 1996. – 115 P. – ISBN: 978-0124912458.

2. Vodinchar, G. M. Model of Geodynamo Driven by six-Jet Convection in the Earth's Core / G.M. Vodinchar, L.K. Feshchenko // Magnetohydrodynamics. – 2016. – V. 52. – № 1. – P. 287–300. – DOI: 10.22364/mhd.52.1-2.32.

3. Элементы векторного анализа и теории поля в пакете Maple / Г. М. Водинчар, М. И. Водинчар. – Петропавловск-Камчатский: Изд-во КамГУ, 2008. – 115 с. – ISBN: 978-5-7968-0385-1.

### **Благодарности**

Работа выполнена по проекту РНФ № 22-11-00064 «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

### **Информация об авторах**

**Водинчар Глеб Михайлович** – канд. физ.-мат. наук, доц., в.н.с. Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: gvodinchar@ikir.ru.

**Фещенко Любовь Константиновна** – канд. физ.-мат. наук, доц., н.с. Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: feshenko.lk@yandex.ru.

## О ЛОКАЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТА РАССЕЯНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

П. А. Ворновских, И. В. Прохоров

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** В работе рассмотрена обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, которая заключается в определении поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению плотности потока излучения в заданной точке пространства. Предложен численный метод определения поверхностей разрыва искомого коэффициента рассеяния, основанный на построении некоторой индикаторной функции. Метод свободен от ограничений приближения однократного рассеяния и теоретически позволяет найти решение обратной задачи в общем случае.

**Ключевые слова:** уравнение переноса излучения, обратная задача, коэффициент рассеяния, поверхности разрыва функции

## ON THE LOCALIZATION OF THE DISCONTINUITY SURFACES OF THE SCATTERING COEFFICIENT FOR RADIATIVE TRANSFER EQUATION

P. A. Vornovskikh, I. V. Prokhorov

*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok  
Far Eastern Federal University, Vladivostok*

**Abstract.** In the paper the inverse problem for the nonstationary radiative transfer equation is formulated and investigated. It consists in determining the discontinuity surfaces of the scattering coefficient by the time-angular distribution of the radiation flux density at a given point in space. A numerical method for localizing the lines of discontinuity of the required scattering coefficient, based on the construction of some indicator function is proposed. The method is free from the limitations of the single scattering approximation and theoretically allows one to find a solution to the inverse problem in the general case.

**Key words:** radiative transfer equation, inverse problem, scattering coefficient, function discontinuity surfaces

Вопросы разработки методов численного решения кинетических уравнений, описывающих физические процессы различной природы, уже достаточно давно являются предметом пристального внимания специалистов [1, 2]. Это связано не только с решением прямых задач, но и с изучением обратных задач для кинетических уравнений, имеющих значительно большую прикладную ценность [3, 4]. Одним из типичных представителей кинетических уравнений является интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения, называемое также линейным уравнением Больцмана. Область применения уравнения переноса достаточно обширна – от моделирования диффузии нейтронов и электронов в веществе до описания процессов распространения высокочастотного электромагнитного и акустического излучения в рассеивающих средах.

В работах [5, 6] предмет исследования – обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения со сосредоточенным импульсным источником, заключающаяся в нахождении коэффициента рассеяния звука по временно-угловому распределению интенсивности излучения на всем промежутке времени в некоторой точке



неограниченного пространства. В двумерном и трехмерном случаях был проведен численный анализ погрешности приближения однократного рассеяния при нахождении решения обратной задачи. Обозначены границы применимости приближения однократного рассеяния при акустическом зондировании океана на частотах порядка нескольких сотен килогерц.

В настоящем докладе рассматривается новая постановка обратной задачи для уравнения переноса излучения. Проблема заключается в определении поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по тем же исходным данным, что и в задаче, рассмотренной в [5, 6]. В отличие от задач, которые были исследованы в работах [5, 6] коэффициент ослабления излучения может быть неизвестным. В тоже время он и не подлежит определению в данной постановке. Задачи такого типа для стационарного уравнения переноса излучения достаточно полно изучены в монографии [4].

Предложен численный метод локализации поверхностей разрыва коэффициента рассеяния, основанный на построении некоторой индикаторной функции, позволяет сравнительно просто локализовать искомые поверхности. Метод свободен от ограничений приближения однократного рассеяния и теоретически позволяет найти решение обратной задачи в общем случае. Численные эксперименты на трехмерном фантоме из работы [6] показали удовлетворительную работоспособность алгоритма, если уровень шума в исходных данных задачи не слишком высок. Паразитное влияние шума на качество томограмм обусловлено особенностью предложенного алгоритма, при численной реализации которого используется конечно-разностный оператор, действующий на функциях, описывающих данные измерений процесса зондирования океана.

### **Библиографический список**

1. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / А. Исимару. – М.: Мир, 1981.
2. Bal, G. Kinetics of scalar wave fields in random media / G. Bal // Wave Motion. – 2005. – V. 43. – P. 132–157.
3. Bal, G. Inverse transport theory and applications / G. Bal // Inverse Problems. – 2009. – V. 25. – № 5. – P. 025019.
4. Использование уравнения переноса в томографии / Д. С. Аниконов, А. Е. Ковтанюк, И. В. Прохоров. – М.: Логос, 2000.
5. Vornovskikh, P. A. The applicability of the approximation of single scattering in pulsed sensing of an inhomogeneous medium / P. A. Vornovskikh, A. Kim, I. V. Prokhorov // Computer Research and Modeling. – 2020. – V. 12. – № 5. – P. 1063–1079.
6. Ворновских, П. А. Сравнительный анализ погрешности приближения однократного рассеяния при решении одной обратной задачи в двумерном и трехмерном случаях / П. А. Ворновских, И. В. Прохоров // Дальневосточный математический журнал. – 2021. – Т. 21. – № 2. – С. 151–165.

### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания НИОКР АААА-А20-120120390006-0 при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2023-946).

### **Информация об авторах**

**Ворновских Полина Андреевна** – инженер-исследователь ИПМ ДВО РАН. E-mail: vornovskikh.pa@dvfu.ru.

**Прохоров Игорь Васильевич** – д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН. E-mail: prokhorov@iam.dvo.ru.



## ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА ТЕТЕТОС И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

М. П. Галанин, В. В. Лукин, А. С. Родин

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), Москва*

**Аннотация.** Платформа разработана для проведения вычислительного эксперимента на всех стадиях анализа и исследования моделей. Разработан модуль для изучения напряженно-деформированного состояния системы тел с учетом неупругих деформаций и контактного взаимодействия. Он применен для анализа тепловыделяющего элемента, включавшего до 100 топливных таблеток и оболочку. Решатели платформы применены к задачам астрофизики. Построены модели образования аккреционных дисков в двойных звездных системах, развития неустойчивости, формирования и ускорения струйных выбросов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, программная платформа Теметос, механика сплошной среды, вычислительный эксперимент

## THE TEMETOS SOFTWARE PLATFORM AND ITS APPLICATION FOR SOLVING PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING

M. P. Galanin, V. V. Lukin, A. S. Rodin

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences  
(KIAM of RAS), Moscow

**Abstract.** The platform is designed to conduct a computational experiment at all stages of analysis and study of models. A module has been developed to study the stress-deformed state of a system of bodies, taking into account inelastic deformations and contact interactions. It is used to analyze the fuel element, including up to 100 fuel tablets and a cladding. Platform solvers are applied to astrophysics problems. Models have been built for the formation of accretion disks in dual star systems, the development of instability, the formation and acceleration of jet emissions.

**Key words:** mathematical modeling, Temetos software platform, continuous media mechanics, computational experiment

Математическое моделирование состояния сплошной среды, находящейся под действием различных сил, является важным методом решения многих фундаментальных и прикладных задач. Для обеспечения моделирования разработана программная платформа Теметос, позволяющая задавать пространственные области сложной геометрической формы и строить в них сгущающиеся, в том числе неструктурированные, сетки. Платформа содержит ряд служебных модулей для подготовки, запуска и анализа результатов расчетов на супер-ЭВМ, включая визуализацию полученного решения.

Программная платформа Теметос [1, 2] предназначена для сопровождения вычислительного эксперимента на всех стадиях анализа и исследования математических моделей физических процессов и технических объектов. Платформа Теметос предоставляет интерфейсы задания геометрической и физической моделей исследуемой конструкции или физического процесса к расчету и позволяет оснастить проблемно-ориентированный решатель инструментами подготовки, проведения и анализа результатов вычислительного эксперимента. При этом решатель не нужно адаптировать к платформе – взаимодействие платформы и решателя организовано через файловую систему. Интерфейсы платформы включают инструменты ра-

боты с геометрическими моделями расчетных областей, сетками, физическими таблицами и зависимостями свойств сред и материалов, начальными и граничными условиями, настройками численных методов и расчетных программ-решателей.

Физическому наполнению платформы Теметос соответствуют разработанные вычислительные модули, ориентированные на конкретный класс задач. В качестве таких модулей разработаны независимые расчетные параллельные программные комплексы, предназначенные для численного решения многомерных задач механики твердого деформируемого тела с использованием метода конечных элементов, уравнений Максвелла в квазистационарном приближении конечно-разностными и конечно-элементными методами [2], систем уравнений газовой динамики и магнитной гидродинамики с использованием метода конечных объемов и разрывного метода Галеркина. Разработка методов и алгоритмов для указанных комплексов включает в себя решение сопутствующих проблем, таких как неединственность решения задачи в случае несвязного объединения проводящих подобластей и границы, эффективное решение больших систем линейных алгебраических уравнений на кластерных вычислительных комплексах, монотонизация численного решения, получаемого методом высокого порядка.

Разработан термомеханический модуль для платформы Теметос, предназначенный для моделирования напряженно-деформированного состояния системы тел с учетом образования различных неупругих деформаций (тепловых, пластических) и контактного взаимодействия тел между собой. Дискретизация задачи термомеханики выполнена с использованием метода конечных элементов. Для решения контактной задачи применен модифицированный метод Неймана-Дирихле (один из вариантов метода декомпозиции области (МДО) без перехлеста подобластей) [3]. Для моделирования системы, включающей в себя большое количество тел, разработан численный алгоритм, основанный на применении двухуровневого аддитивного метода Шварца (вариант МДО с перекрытием подобластей). Данный алгоритм предполагает разбиение исходной области на ряд пересекающихся подобластей, при этом любая подобласть может включать в себя участки нескольких тел. В ходе итерационного процесса решение глобальной задачи сводится к решению локальных задач в каждой подобласти. Локальные задачи могут быть нелинейными (например, учитывать контакт или пластичность), они решаются независимо друг от друга. В конце итерации вычисляется новое приближение глобального решения. Для ускорения сходимости итерационного процесса использована дополнительная грубая сетка, на которой решалась вспомогательная задача, позволяющая на каждой итерации вычислить дополнительный вклад в вектор глобального решения.

Разработанный модуль применен для моделирования термомеханического состояния участка тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ), который включал в себя столб из  $N$  топливных таблеток (цилиндр с внутренним отверстием и фасками на торцах) и соответствующий участок цилиндрической оболочки [4]. В процессе моделирования учитывались  $(N - 1)$  контактная пара таблетка/таблетка и  $N$  контактных пар таблетка/оболочка. Выполнена серия расчетов выхода ТВЭЛ на режим работы с номинальной мощностью тепловыделения в осесимметричной и трехмерной постановках (для сектора  $90^\circ$ ). В расчетах  $N$  менялось от 1 до 100. Полученные результаты продемонстрировали, что построенный алгоритм обеспечивает аккуратное выполнение граничных условий на контактных поверхностях. С увеличением количества таблеток  $N$  время расчета возрастало по зависимости, близкой к  $O(N)$ .

К числу других задач, решение которых получено при помощи решателей платформы Теметос, относятся задачи математического моделирования в астрофизике. Задача моделирования электромагнитной коллимации и ускорения плазмы возникает при описании астрофизических струйных выбросов – джетов, скорость которых достигает от 0,25 до 0,9 скорости света, при этом поток плазмы остается сжатым на больших расстояниях. Построены модели образования аккреционных дисков в двойных звездных системах, развития неустойчивости, формирования и ускорения струйных выбросов в таких дисках. Эти модели опираются на систему уравнений динамики невязкого сжимаемого газа в поле гравитации звезд с

учетом или без учета его ионизации, влияния магнитного поля, излучения. Разработаны решатели, позволяющие моделировать течения плазмы в различных пространственных приближениях. С их помощью, в частности, получены синтетические кривые блеска двойной звездной системы V1239Her, имеющие хорошее совпадение с наблюдениями [5]. Такая модель позволяет объяснить и интерпретировать специфические особенности наблюдательных кривых, включая наличие предзатменного горба яркости и асимметрию кривой в момент затмения. Полученные результаты хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными и наблюдательными данными, а также с результатами других исследователей.

### Библиографический список

1. Галанин, М. П. Прототип интегрированной программной платформы для сопровождения вычислительного эксперимента в комплексных задачах математического моделирования / М. П. Галанин, М. М. Горбунов-Посадов, А. В. Ермаков, В. В. Лукин, А. С. Родин, К. Л. Шаповалов // Труды Института системного программирования. – 2014. – Т. 26. – №. 3. – С. 51–68.
2. Галанин, М. П. Применение программной платформы Теметос для разработки среды моделирования электромагнитного ускорителя / М. П. Галанин, В. В. Лукин, А. С. Родин, Д. Л. Сорокин // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2018. – № 44. – С. 32.
3. Галанин, М. П. Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента / М. П. Галанин, А. С. Родин. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. – 62. – № 4. – С. 659–676. – DOI: 10.31857/S004446692204007X.
4. Аронов, П. С. Численное решение задачи контактного взаимодействия элементов твэла с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области / П. С. Аронов, М. П. Галанин, А. С. Родин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2021. – № 3. – С. 4–22.
5. Lukin, V. V. 3D-modeling of accretion disc in eclipsing binary system V1239 Her / V. V. Lukin, K. L. Malanchev, N. I. Shakura, K. A. Postnov, V. M. Chechetkin, V. P. Utrobin // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2017. – V. 467. – № 3. – P. 2934–2942.

### Благодарности

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (грант 22-21-00260).

### Информация об авторах

**Галанин Михаил Павлович** – д-р физ.-мат. наук, проф., гл.н.с., и.о. зав. отделом ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. E-mail: galan@keldysh.ru.

**Лукин Владимир Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, ст.н.с. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. E-mail: vvlukin@gmail.com

**Родин Александр Сергеевич** – канд. физ.-мат. наук, ст.н.с. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. E-mail: rals@bk.ru.

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ПОДВОДНОГО ОБЪЕКТА С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЗНАЧЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ, СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

А. Е. Голубев

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

**Аннотация.** Рассматривается задача построения и стабилизации траекторий пространственного движения подводного объекта с учетом ограничений на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений. Программная траектория выбирается в классе монотонных на заданном временном отрезке многочленов третьего порядка исходя из начального и конечного состояний системы, а также ограничений. Стабилизирующее программную траекторию управление строится на основе нелинейной модели движения аппарата при помощи метода бэкстеппинга в сочетании с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Работоспособность полученных законов управления подтверждается результатами численного моделирования в среде MATLAB/Simulink.

**Ключевые слова:** нелинейное управление, стабилизация, бэкстеппинг, управление механическими системами, управление с учетом ограничений

## AUV MOTION CONTROL UNDER CONSTRAINTS ON THE GENERALIZED COORDINATES, VELOCITIES AND ACCELERATIONS

A. E. Golubev

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow*

**Abstract.** The problem of constructing and stabilizing the trajectories of spatial motion of an underwater vehicle is considered, taking into account restrictions on the values of generalized coordinates, velocities and accelerations. The reference trajectory is chosen in the class of third-order time polynomials that are monotone on a given time interval based on the initial and final states of the system, as well as the constraints. The control stabilizing the reference trajectory relies upon a nonlinear model of vehicle motion and is constructed using the integrator backstepping method in combination with a logarithmic barrier Lyapunov function. The performance of the obtained control law is confirmed by the results of numerical simulation in the MATLAB/Simulink environment.

**Key words:** nonlinear control, stabilization, integrator backstepping, constrained control, AUV control

Разработка алгоритмов управления движением автономных подводных аппаратов является одной из важных и популярных тем исследований последних десятилетий (см., например, [1–3]). При отслеживании программных траекторий движения объектов управления переменные состояния системы должны находиться в рамках допустимых значений, обусловленных требованиями безопасности к переходным процессам. Одним из эффективных с точки зрения возможностей учета ограничений методов синтеза стабилизирующих законов управления на основе нелинейных моделей движения является метод бэкстеппинга [4]. В работе рассмотрена задача построения и стабилизации траекторий пространственного движения подводного аппарата, уравнения движения которого в векторной форме имеют вид [1]:

$$\mathbf{M}_\eta(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_1^T, \boldsymbol{\eta}_2^T)^T$ ,  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T)^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_1 = (x, y, z)^T$  – координаты начала  $O_b$  неинерциальной системы координат, жестко связанной с корпусом подводного аппарата, в инерциальной неподвижной системе координат,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$  – угловые координаты поворота неинерциальной системы координат относительно инерциальной системы координат,  $\varphi$  – угол крена,  $\theta$  – угол тангажа,  $\psi$  – угол рысканья,  $\mathbf{v}_1 = (u, v, w)^T$  – координаты вектора скорости точки  $O_b$  в неинерциальной системе координат,  $\mathbf{v}_2 = (p, q, r)^T$  – координаты вектора угловых скоростей вращения корпуса аппарата относительно соответствующих осей неинерциальной системы координат,  $\mathbf{M}_\eta(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ ,  $\mathbf{D}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) = \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ ,  $\mathbf{C}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) = [\mathbf{C}(\mathbf{v}) - \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})]\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ . Здесь  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) + \mathbf{C}_A(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{M}_{RB}$  – матрица инерции твердого тела,  $\mathbf{M}_A$  – матрица добавочной инерции,  $\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})$  – матрица кориолисовых и центробежных сил,  $\mathbf{C}_A(\mathbf{v})$  – матрица гидродинамических кориолисовых и центробежных сил,  $\mathbf{D}(\mathbf{v})$  – матрица гидродинамического демпфирования, слагаемое  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  характеризует действие силы тяжести и выталкивающей силы на корпус аппарата,  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$  – матрица Якоби угловых скоростей, вектор  $\boldsymbol{\tau}$  представляет собой силы и моменты, создаваемые управляющими органами аппарата.

Программная траектория  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , движения корпуса подводного аппарата, удовлетворяющая фиксированным начальным и конечным условиям на переменные состояния  $\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}$  системы (1) :

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = \dot{\boldsymbol{\eta}}_0, \quad \boldsymbol{\eta}(T) = \boldsymbol{\eta}_*, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}(T) = \dot{\boldsymbol{\eta}}_*, \quad (2)$$

а также ограничениям

$$|\eta_i(t)| \leq B_i, \quad |\dot{\eta}_i(t)| \leq N_i, \quad |\ddot{\eta}_i(t)| \leq Q_i \quad \text{при всех } t \in [0, T], \quad (3)$$

где  $B_i$ ,  $N_i$  и  $Q_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , – некоторые заданные положительные числа, задается при помощи полиномов

$$\eta_i = p_i(t) = \eta_{0i} + \dot{\eta}_{0i}t + c_{1i}t^2 + c_{2i}t^3, \quad i = \overline{1, 6}. \quad (4)$$

Коэффициенты  $c_{1i}$ ,  $c_{2i}$  находятся из условий  $p_i(T) = \eta_{*i}$ ,  $\dot{p}_i(T) = \dot{\eta}_{*i}$ . Рассматривая коэффициенты  $c_{1i}$ ,  $c_{2i}$  как функции времени движения  $T$  и/или каких-либо величин среди начальных  $\eta_i(0)$ ,  $\dot{\eta}_i(0)$  или конечных  $\eta_i(T)$ ,  $\dot{\eta}_i(T)$  значений в соотношениях (2) при всех  $i = \overline{1, 6}$ , с использованием результатов работы [5] обеспечивается выполнение ограничений (3) за счет свойств монотонности функций (4), а также их производных по времени  $t$  на отрезке  $t \in [0, T]$ . Обозначим  $i$ -ю компоненту вектор-функции  $\mathbf{P}(t)$  через  $p_i(t)$  и определим соответствующие ошибки отслеживания  $\xi_{li} = \eta_i - p_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , программной траектории  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}(t)$ . Управление, стабилизирующее программную траекторию  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , системы (1) с учетом ограничений  $|\xi_{li}(t)| \leq \varepsilon_{li}$ ,  $|\dot{\xi}_{li}(t)| \leq \varepsilon_{2i}$ ,  $|\ddot{\xi}_{li}(t)| \leq \varepsilon_{3i}$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ,  $t \geq 0$ ,

где  $\varepsilon_{li}$ ,  $\varepsilon_{2i}$  и  $\varepsilon_{3i}$  – некоторые заданные положительные константы, удовлетворяющие соответственно условиям  $\varepsilon_{li} \geq |\xi_{li}(0)|$ ,  $\varepsilon_{2i} \geq |\dot{\xi}_{li}(0)|$ , и  $\varepsilon_{3i} \geq |\ddot{\xi}_{li}(0)|$ , запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{M}_\eta(\boldsymbol{\eta})(\ddot{\mathbf{P}}(t) - \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1\xi_1 - (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\xi_1 - \mathbf{b}). \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}(k_{11}, \dots, k_{16}) > 0$ ,  $\mathbf{K}_2 = \text{diag}(k_{12}, \dots, k_{26}) > 0$ ,  $\xi_1 = \eta - \mathbf{P}(t)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_6)^T$ ,  $b_i = (\dot{\xi}_{1i} + k_{1i}\xi_{1i}) \left( (\varepsilon_{2i} - k_{1i}\varepsilon_{1i})^2 - (\dot{\xi}_{1i} + k_{1i}\xi_{1i})^2 \right)$ ,  $i \in \overline{1, 6}$ .

Закон управления (5) построен при помощи метода бэкстеппинга в сочетании с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова [6].

Результаты численного моделирования в среде MATLAB/Simulink системы (1) с управлением (5) представлены на рис. 1 для значений физических и геометрических параметров модели, соответствующих подводному аппарату Kambara [2].

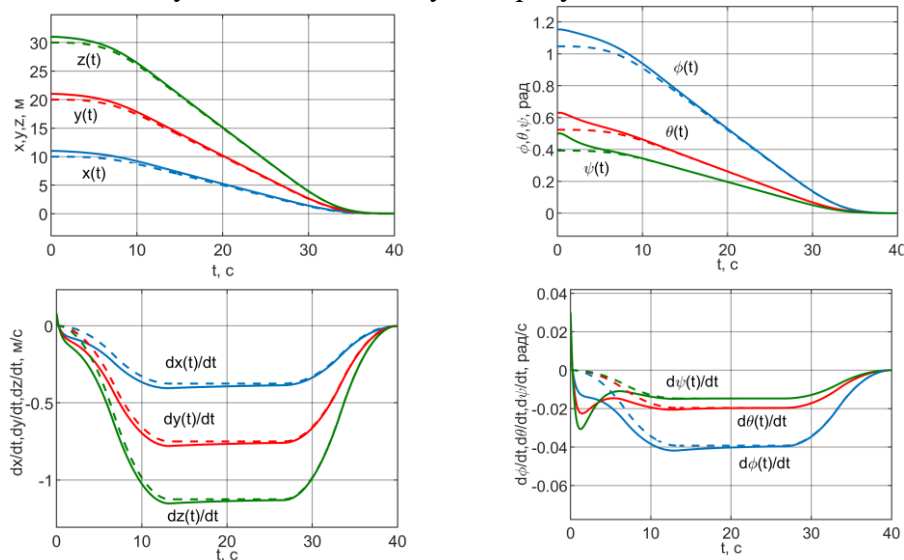


Рисунок 1 – Переменные состояния системы (1) с управлением (5) как функции времени (сплошные линии) и их программные значения (пунктир)

### Библиографический список

1. Guidance and control of ocean vehicles / T. I. Fossen. – Chichester: John Wiley and Sons, 1994. – 494 p.
2. Silpa-Anan, C. Kambara: past, present, and future / C. Silpa-Anan, A. Zelinsky // Proceedings of the Australian Conference on Robotics and Automation, Sydney. – 2001. – P. 61–66.
3. Rigatos, G. AUV Control and navigation with differential flatness theory and derivative-free nonlinear Kalman filtering / G. Rigatos, G. Raffo, P. Siano // Intelligent Industrial Systems. – 2017. – V. 3. – P. 29–41. – DOI: 10.1007/s40903-017-0068-y.
4. Nonlinear and adaptive control design / M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović. – New York: John Wiley and Sons, 1995. – 563 p.
5. Голубев, А. Е. Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка / А. Е. Голубев // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2021. – № 2. – С. 126–137. – DOI: 10.31857/S0002338820060049.
6. Ngo, K. B. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints / K. B. Ngo, R. Mahony, Z. P. Jiang // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, Spain. – 2005. – P. 8306–8312. – DOI:10.1109/CDC.2005.1583507

### Информация об авторах

**Голубев Алексей Евгеньевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., с.н.с. Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН. E-mail: v-algolu@hotmail.com.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОДОГРЕЙНОГО КОТЛА И ЕЁ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АПРОБАЦИЯ

С. А. Гордин, И. В. Зайченко, А. А. Животова

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре*

**Аннотация.** Низкая эффективность систем теплоснабжения на базе угольных котлов при высокой стоимости угля обуславливает необходимость поиска целесообразных к внедрению систем управления. Разрабатываемая авторским коллективом математическая модель водогрейного котла успешно прошла апробацию на экспериментальной установке, имитирующую систему теплоснабжения и может быть использована для разработки системы «цифровой двойник» для изолированной системы теплоснабжения.

**Ключевые слова:** водогрейные котлы, система теплоснабжения, математическая модель, система управления, цифровой двойник

## MATHEMATICAL MODEL OF A HOT WATER BOILER AND ITS EXPERIMENTAL TESTING

S. A. Gordin, I. V. Zaychenko, A. A. Zhivotova

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur

**Abstract.** Low efficiency of heat supply systems based on coal-fired boilers at high cost of coal necessitates the search for expedient control systems for implementation. Developed by the authors' team mathematical model of the hot-water boiler has been successfully tested on the experimental setup simulating the heat supply system and can be used to develop a "digital twin" system for an isolated heat supply system.

**Key words:** hot water boilers, heat supply system, mathematical model, control system, digital twin

Анализ данных по котельным края показывает, что в целом наблюдается системная проблема низкой эффективности угольных котельных [1]. Такая низкая эффективность так же не связана с определенными типами используемых котлов, а присуща большинству угольных котлов [2]. Базовой причиной снижения эффективности угольных котлов является способ сжигания угля путём периодичной подачи и, как следствие, его неравномерности горения при отсутствии автоматики регулирования избытка воздуха в топке котла.

Но автоматика регулирования угольных котлов не внедряется на котельных не из-за финансовых проблем, а по причине отсутствия таких решений на рынке [3], поскольку существующие решения автоматического управления рассчитаны на системы с непрерывной подачей топлива и не могут работать при порционной неравномерной подаче топлива в топку котла.

Данная проблема является частью общей проблемы эффективности энергетики Дальнего востока [3], но на сегодняшний день отсутствуют эффективные решения по повышению энергоэффективности рассмотренных котельных. Для повышения энергоэффективности угольных котельных, требуется найти не только организационные или технические решения, но и алгоритм оптимального управления элементами твердотопливного котла.

В основе такого алгоритма находится математическая модель, описывающая не только процесс преобразования химической энергии топлива в тепловую энергию теплоносителя, но и влияние системы управления на этот процесс [4]. Данная модель позволяет при задан-

ных параметрах воздуха на входе в котел, состава топлива и его теплоте сгорания, номинальных напорах дутьевого насоса, дымососа, сетевого насоса и насоса подпитки, геометрических и физических параметрах котла и труб однозначно определить все расчётные параметры при заданных допущениях. Корректность модели была точно проверена путем сопоставления результатов расчёта с результатами измерений на действующей котельной с получением расхождения расчетных и фактических значений на уровне 1.8..4.7 %.

Но для полноценной экспериментальной апробации модели и отладки алгоритмов системы управления такие точечные сопоставления не достаточны, а проведение различных экспериментов на действующей котельной невозможно по соображениям безопасности и надёжности теплоснабжения потребителей.

Поэтому нами была спроектирована и реализована экспериментальная установка, моделирующая изолированную систему теплоснабжения и позволяющая проведение длительных экспериментов на всех возможных, в том числе аварийных, режимах работы.

Экспериментальная апробация математической модели водогрейного котла, проводимая на экспериментальной установке, показала, что модель не только достаточно точно описывает происходящие в системе процессы, но и позволяет разработать эффективную систему управления твердотопливным котлом, в том числе использующую такую технологию как «цифровой двойник».

### **Библиографический список**

1. Кононов, Ю. Д. Оценка влияния неопределенности исходных данных на эффективность вариантов энерго- и топливоснабжения регионов в прогнозных исследованиях / Ю. Д. Кононов, В. Н. Тыртышный // Проблемы прогнозирования. – 2013. – № 1(136). – С. 90–94.
2. Gordin, S. A. Method of estimating fuel combustion efficiency at a boiler house / S. A. Gordin, V. A. Shamak, V. D. Berdonosov // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2022. – V. 1070(1). – 012009.
3. Соколов, А. Д. Энергоэкономический анализ топливно-энергетического комплекса Дальнего Востока / А. Д. Соколов, С. Ю. Муzychuk, Р. И. Муzychuk // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2017. – Т. 21, № 1(120). – С. 141–155.
4. Гордин С. А. Имитационное моделирование динамических процессов в системах централизованного теплоснабжения / С. А. Гордин, А. А. Соснин, В. А. Шамак, К. Д. Хряпченко // Информатика и системы управления. – 2022. – № 3(73).

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01232, <https://rscf.ru/project/22-29-01232>

### **Информация об авторах**

**Гордин Сергей Александрович** – канд. техн. наук, доцент кафедры Прикладная математика Комсомольского-на-Амуре государственного университета. E-mail: [gordin@knastu.ru](mailto:gordin@knastu.ru).

**Зайченко Илья Владимирович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры Управление инновационными проектами и процессами Комсомольского-на-Амуре государственного университета. E-mail: [gordin@knastu.ru](mailto:gordin@knastu.ru).

**Животова Алена Анатольевна** – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета.



## РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ

М. А. Донская, И. П. Яровенко

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** В докладе рассматриваются вопросы математического моделирования процесса нестационарного переноса рентгеновского излучения. Данный процесс формализован в виде начально-краевой задачи для уравнения переноса излучения, которая решается весовым методом Монте-Карло. Обсуждаются вопросы реализации предложенного метода при помощи поточно-параллельных вычислений на графическом процессоре (GPU).

**Ключевые слова:** уравнение переноса излучения, метод Монте-Карло, параллельные вычисления

## NUMERICAL SOLVING THE NON-STATIONARY RADIATION TRANSFER EQUATION USING GRAPHICS PROCESSING UNITS

M. A. Donskaya, I. P. Yarovenko

Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Abstract.** The paper considers the issues of mathematical modeling of the non-stationary transfer of X-ray radiation. We describe the process using an initial-boundary problem for the radiation transfer equation, which is solved by the weighted Monte Carlo method. The implementation of the method proposed using parallel calculations on graphic processor units (GPU) is discussed.

**Key words:** radiation transfer equation, Monte-Carlo method, parallel computations

Основной моделью теории переноса излучения является интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения. Данное уравнение достаточно точно описывает процесс взаимодействия излучения с веществом, и его коэффициенты имеют очевидный физический смысл [1]. Хорошо известно, что в общем случае уравнение переноса излучения не имеет аналитического решения. В настоящее время существует достаточно большое количество полуаналитических и численных методов для решения уравнения переноса излучения, которые требуют выполнения довольно жестких ограничений на структуру среды либо на поведение коэффициентов уравнения [2].

В общем случае, когда требуется решить уравнения переноса излучения в трехмерном случае, фактически единственным методом является метод Монте-Карло.

Идея данного метода основана на представлении переноса излучения в среде в виде случайного процесса (движения через среду фотонов) и накопления необходимого количества статистической информации для того, чтобы построить оценку для решения [3]. Практическое применение данного метода в расчетах осложняется его низкой скоростью сходимости, пропорциональной  $\sqrt{N}$ , где  $N$  – количество моделируемых траекторий. Таким образом, для достижения приемлемой точности необходимо моделировать огромное количество траекторий, так в практических приложениях необходимое число траекторий может достигать  $10^{12}$ , а время расчетов на однопроцессорной вычислительной машине может занимать несколько недель.

В последние годы появилась практическая возможность проведения поточно-параллельного физико-математического моделирования на графических процессорах (GPU)

– вычислительных устройствах параллельной архитектуры, изначально предназначенных для отображения графики на персональных компьютерах и рабочих станциях. Современные графические ускорители имеют в своем составе до нескольких сотен параллельных процессоров, каждый из которых по вычислительной производительности сравним с центральным процессором персонального компьютера. Таким образом, задача построения параллельных алгоритмов решения уравнения переноса излучения, несомненно актуальна.

В настоящее время существует ряд работ посвященных реализациям метода Монте-Карло на GPU в случае стационарного уравнения переноса излучения, отметим наиболее релевантную работу [4].

Появление в последнее время импульсных источников и детекторов с хорошим временным разрешением позволило создать рентгеновские установки, позволяющие испускать и регистрировать ультракороткие импульсы [5]. Поэтому есть технологическая возможность для построения новых методов неразрушающего контроля вещества, учитывающих особенности нестационарных процессов взаимодействия излучения со средой. В связи с этим особенно актуальна разработка высокопроизводительных методов моделирования процесса распространения ультракоротких импульсов в рассеивающей и поглощающей среде.

В рамках данного доклада обсуждаются вопросы реализации метода Монте-Карло для моделирования нестационарного процесса переноса излучения, создаваемого импульсным (по времени) источником излучения. В рамках работы даются рекомендации по выбору метода розыгрыша свободного пробега частиц, который является наиболее вычислительно трудоемкой процедурой в методе. Сравнивается производительность работы метода максимального сечения и розыгрыша пробега в среде с кусочно-постоянными коэффициентами.

### **Библиографический список**

1. Linear Transport Theory / K. M. Case, P. F. Zweifel. – Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
2. Радиационный перенос в рассеивающей и поглощающей атмосферах: стандартные вычислительные процедуры / Ж. А. Ленобль. – Deepak Publishing, 2002. – 583 с. – ISBN 978-0-12-451451-5.
3. Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М.: Наука, 1982.
4. Жуковский, М. Е. Моделирование взаимодействия гамма-излучения с веществом на гибридных вычислительных системах. / М. Е. Жуковский, Р. В. Усков // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23. – № 7. – С. 20–32.
5. Fetisov, G. V. X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements/ G.V.Fetisov // Physics-USpekhi. – 2020. – V.63 (1). – P. 2–32. – DOI: 10.3367/UFNr.2018.10.038435.

### **Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2023-946).

### **Информация об авторах**

**Донская Мария Андреевна** – студент 4-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: aaa@mail.ru.

**Яровенко Иван Петрович** – канд. физ.-мат. наук, доц., Дальневосточный федеральный университет. E-mail: yarovenko.ip@dvfu.ru.

## ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

А. А. Дончак<sup>1</sup>, Р. В. Бризицкий<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

<sup>2</sup>Амурский государственный университет, Благовещенск

**Аннотация.** Доказывается разрешимость задачи мультипликативного управления для нелинейной модели реакции-диффузии. В случае, когда функционалы качества дифференцируемы по Фреше, для степенных коэффициентов реакции выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем для конкретных функционалов качества получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений.

**Ключевые слова:** уравнение реакции-диффузии, задача мультипликативного управления, система оптимальности, оценки локальной устойчивости

## STABILITY ESTIMATES OF MULTIPLICATIVE CONTROL PROBLEM'S SOLUTIONS FOR NONLINEAR REACTION-DIFFUSION MODEL

A. A. Donchak<sup>1</sup>, R. V. Brizitskii<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Far Eastern Federal University, Vladivostok

<sup>2</sup>Amur State University, Blagoveshchensk

**Abstract.** The solvability of the multiplicative control problem for a nonlinear reaction-diffusion model is proved. In the case when the cost functionals are Fréchet differentiable, the optimality systems are derived for the power-law reaction coefficients. Based on the analysis of these systems for specific cost functionals, the local stability estimates of optimal solutions are obtained.

**Key words:** reaction-diffusion model, multiplicative control problem, optimality system, local stability estimates

Поиск эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах ведется на протяжении нескольких десятилетий. Данный поиск тесно связан с исследованием задач управления для различных моделей гидродинамики, в частности, моделей тепломассопереноса и реакции-диффузии-конвекции. В свою очередь, исследование задач управления опирается на результаты о разрешимости и качественном анализе решений соответствующих краевых задач. При этом поиску эффективных механизмов управления способствует отказ от искусственных ограничений в рассматриваемых моделях. Одним из которых является приближение Обербека-Буссинеска. Об исследовании краевых задач для моделей массопереноса, обобщающих приближение Обербека-Буссинеска и учитывающих реакцию, см. в [1].

В настоящей работе исследуются задачи мультипликативного управления для модели реакции-диффузии, в которой коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а также зависит от пространственных переменных.

В ограниченной области  $\Omega \subset R^3$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ , рассматривается следующая краевая задача:

$$-\operatorname{div}(\lambda(x) \nabla \varphi) + k(\varphi, x) \varphi = f, \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\varphi = \psi \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \lambda(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha(x) \varphi \right) = \chi \quad \text{на } \Gamma_N. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация вещества,  $u$  – заданный вектор скорости,  $\lambda(x) > 0$  – коэффициент диффузии,  $k(\varphi, x) > 0$  – коэффициент реакции, где  $x \in \Omega$ ,  $f$  – объемная плотность источников вещества,  $\alpha(x) > 0$  – коэффициент массообмена. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях  $\lambda$ ,  $k$ ,  $f$ ,  $\psi$  и  $\chi$  будем ссылаться как на задачу 1.

Глобальная разрешимость и единственность решения задачи 1 вытекает из результатов работы [2] при условии, что нелинейность, порождаемая зависимым от решения коэффициентом реакции, является монотонной. В [3] установлены достаточные условия на исходные данные задачи 1, при которых справедлив принцип максимума и минимума для концентрации вещества.

В настоящей работе для задачи 1 доказана разрешимость задачи мультипликативно-го управления, роль управлений в которой играют функции  $\lambda$  и  $\alpha$ , при минимальных требованиях на коэффициент диффузии  $\lambda$ . Как видно из граничных условий (2), рассматриваемая задача обладает двойной нелинейностью только по управлению. Для конкретного коэффициента реакции  $k(\varphi) = \varphi^5$  и дифференцируемых по Фреше функционалов качества, получены системы оптимальности. На основе анализа данных систем для конкретных функционалов качества получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и граничной функции  $\psi$ , не являющейся управлением. При выводе оценок локальной устойчивости использовалась техника, разработанная в [4] для работы с двойными нелинейностями. В заключение отметим, что в рамках оптимизационного подхода к рассматриваемой в работе задаче мультипликативного управления может быть сведена задача восстановления коэффициентов  $\lambda$  и  $\alpha$  по дополнительной информации о решении задачи 1 (см. [5]).

### Библиографический список

1. Alekseev, G. V. Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Bousinesq model of mass transfer with variable coefficients / G. V. Alekseev, R. V. Brizitskii // Symmetry. – 2022 – V. 14 (22) – Article ID 2580. – DOI: 10.3390/sym14122580.
2. Бризицкий, Р. В. Теоретический анализ краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции-диффузии-конвекции / Р. В. Бризицкий, В. С. Быстрова, Ж. Ю. Сарницкая // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57. – № 5. – С. 615–629. – DOI: 10.31857/S037406412105006X.
3. Alekseev, G. V. Analysis of the boundary value and control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection equation / G. V. Alekseev, R. V. Brizitskii // Journal of Siberian Federal University – Mathematics. – 2021. – V. 14(4). – P. 452–462. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-452-462.
4. Brizitskii, R. V. Multiplicative control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model / R. V. Brizitskii, Z. Y. Saritskaia // J. Dynam. Control Syst. – 2021. – V. 27 (2) – P. 379–402. – DOI: 10.1007/s10883-020-09508-z.
5. Brizitskii, R. V. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation / R. V. Brizitskii, Z. Y. Saritskaya // J. Inv. Ill-Posed Probl. – 2018. – V. 9. – P. 821–834. – DOI: 10.1515/jiip-2017-0011.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 122082400001-8 и проект № 075-02-2023-946).

### Информация об авторах

**Дончак Ангелина Антоновна** – лаборант РНОМЦ ДЦМИ ДВФУ, E-mail: geliadonchak@mail.ru.

**Бризицкий Роман Викторович** – канд. физ.-мат. наук, доцент ИМКТ ДВФУ, E-mail: mlnwizard@mail.ru.

## СПЕЦИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ АУСКУЛЬТАЦИИ ЛЕГКИХ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОГО И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В. В. Евдокимова<sup>1</sup>, Е. Ю. Афанасьева<sup>2</sup>, А. Г. Масловская<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Амурский государственный университет, Благовещенск

<sup>2</sup>Дальневосточный научный центр физиологии и патологии дыхания, Благовещенск

**Аннотация.** В работе рассмотрены фрактальные и мультифрактальные свойства сигналов аускультации легких: везикулярного, бронхиального и бронховезикулярного шумов, свистящего и влажного хрипов. Для исследования легочных шумов применялись алгоритм Хигучи и метод мультифрактального флуктуационного анализа. Программная реализация алгоритмов проведена в пакете Matlab. Установлены фрактальные и мультифрактальные характеристики исследуемых сигналов.

**Ключевые слова:** легочный шум, фрактальная размерность, алгоритм Хигучи, мультифрактальный флуктуационный анализ

## SPECIFICATION OF LUNG AUSCULTATION SIGNALS BASED ON THE METHODS OF FRACTAL AND MULTIFRACTAL ANALYSIS

V. V. Evdokimova<sup>1</sup>, E. Yu. Afanasyeva<sup>2</sup>, A. G. Maslovskaya<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Amur State University, Blagoveshchensk

<sup>2</sup>Far Eastern Scientific Center of Physiology and Pathology of Respiration, Blagoveshchensk

**Abstract.** The article is devoted to the fractal and multifractal properties of lung auscultation signals: vesicular, bronchial and bronchovesicular sounds, wheezes and crackles. The Higuchi algorithm and method of multifractal fluctuation analysis. The algorithms were implemented using the Matlab software. Fractal and multifractal characteristics of the considered signals were established.

**Key words:** lung sounds, fractal dimension, Higuchi algorithm, multifractal fluctuation analysis

Множество сложных живых систем описываются биомедицинскими сигналами, которые представляют собой временные ряды. Известными примерами регистрации динамических данных при медицинской диагностике сердца и мозга являются сигналы электрокардиограммы, фонокардиограммы, электроэнцефалограммы. Шумы, выслушиваемые над дыхательными путями и легочной тканью, также представляют собой биомедицинские сигналы, регистрируемые при аускультации легких.

Ввиду особой значимости ранней диагностики осложнений заболеваний легких, в последние годы в области междисциплинарных исследований особую роль играют средства интеллектуального анализа биомедицинских сигналов. В практике используют методы математической статистики, спектральные методы, методы фрактального анализа, нейронные сети, гибридные подходы и др. Так, например, методы спектрального анализа, направленные на выявление осложненных и продолжительных респираторных заболеваний описаны в [1]. В [2] было выяснено, что природа возникновения трахеального и везикулярного шума различна, но им обоим присущ мультифрактальный характер. Целью настоящей работы является определение потенциально возможных методов фрактального и мультифрактального анализа для характеристики сигналов аускультации легких.

Для расчета фрактальных размерностей сигналов аускультации легких использован метод Хигучи, который подходит для исследований сложных нестационарных биомедицин-

ских сигналов, например, ЭКГ [3]. Рассмотрим шаги алгоритма. Чтобы определить фрактальную размерность временного ряда  $Y(t)$ , необходимо его разбить на  $k$  новых рядов:

$$Y_m^k = \left\{ Y(m), Y(m+k), Y(m+2k), \dots, Y\left(m + \left\lfloor \frac{N-m}{k} \right\rfloor k\right) \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, k.$$

Значения  $m$  и  $k$  – целые числа, « $\lfloor \cdot \rfloor$ » представляет собой целую часть. Длины кривых для полученных рядов определяется следующим образом:

$$L_m(k) = \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-m}{k} \right\rfloor} |Y(m+ik) - Y(m+(i-1)k)| \right) \frac{N-1}{\left\lfloor \frac{N-m}{k} \right\rfloor k}.$$

Полная средняя длина кривой в таком случае будет равна:  $\langle L(k) \rangle = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k L_m(k)$ . Если условие  $\langle L(k) \rangle \sim k^{-D}$  выполняется, тогда ряд  $Y(t)$  является фрактальным с размерностью  $D$ , которая определяется по наклону зависимости  $\ln L(k)$  от  $\ln k$ .

Для расчета мультифрактальных спектров используем метод мультифрактального флуктуационного анализа [4]. Этот метод позволяет избежать ложного обнаружения корреляций, которые могут оказаться артефактами нестационарности в сигнале. На первом шаге алгоритма определяется флуктуационный профиль  $X(i)$  ряда, который далее делится на  $N_s = \text{int}(N/s)$  непересекающихся отрезков длиной  $s$ . Затем рассчитывается локальный тренд для каждого сегмента методом наименьших квадратов, после чего определяется дисперсия:

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left\{ X[(v-1)s + i] - x_v(i) \right\}^2, \quad v = 1, \dots, N_s,$$

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left\{ X[N - (v - N_s)s + i] - x_v(i) \right\}^2, \quad v = N_s + 1, \dots, 2N_s.$$

Далее усредняем значения по всем сегментам для получения функции флуктуации:

$$F_q^2(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad q \neq 0.$$

Программная реализация указанных методов проведена в ППП Matlab. Для верификации работы алгоритмов проведено тестирование программ на сгенерированной функции Вейерштрасса с заранее известной и настраиваемой фрактальной размерностью. На рис. 1 показана динамика изменения фрактальной размерности на различных участках дыхания исследуемых сигналов [5].

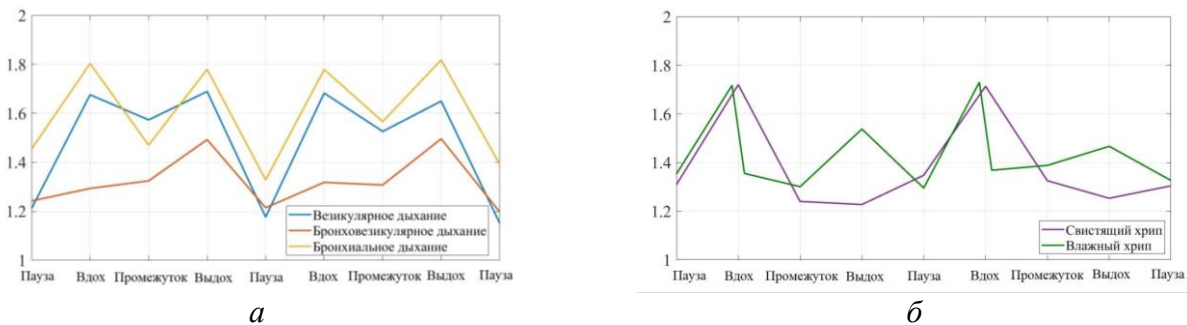


Рисунок 1 – Динамика фрактальной размерности везикулярного, бронховезикулярного, бронхиального дыхания – (а), свистящего и влажного хрипов – (б)

Можно отметить, что каждый вид дыхательного сигнала характеризуется особым поведением фрактальной размерности, схожая динамика фрактальной размерности соответствует только бронхиальному и везикулярному сигналам. Преимущественно для этих сигналов на каждом участке (кроме паузы) имеет место антиперсистентное поведение ( $H < 0.5$ ,  $D > 1.5$ ). Бронховезикулярное дыхание практически на полном диапазоне регистрации харак-

теризуется персистентным поведением ( $H > 0.5$ ,  $D < 1.5$ ) и для свистящего хрипа мы можем наблюдать персистентные участки в период выдоха.

Рассмотрим особенности мультифрактальных спектров для везикулярного и бронховезикулярного дыхания, свистящего хрипа на участке между вдохом и выдохом (рис. 2). При бронховезикулярном дыхании наблюдается уширение спектра и тенденция к симметрии. Для свистящего хрипа на рассматриваемом участке характерно укорачивание «веток».

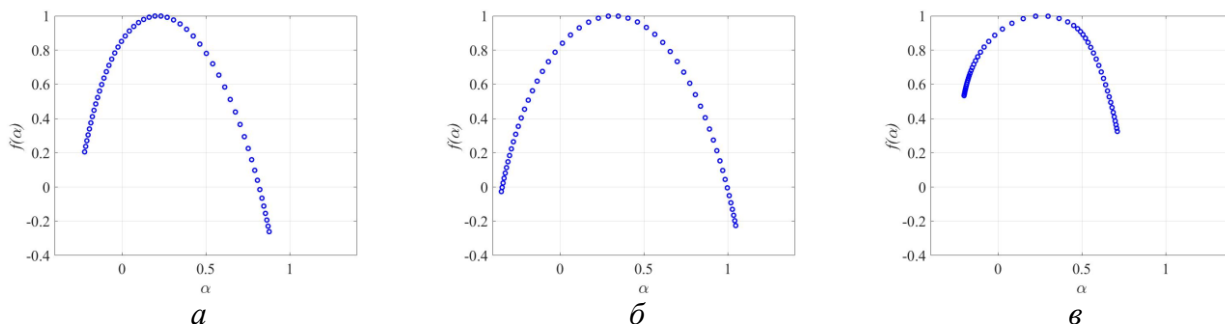


Рисунок 2 – Мультифрактальный спектр размерностей для везикулярного – (а), бронховезикулярного – (б) дыхания и свистящего хрипа – (в) на промежутке между вдохом и выдохом

Таким образом, проведена оценка чувствительности метода Хигучи и мультифрактального анализа к диагностике особенностей дыхательных шумов. Очевидными направлениями развития тематики является исследование диагностических возможностей указанных методик на широком ряде данных для установления статистических характеристик.

### Библиографический список

1. Raj, V. Nonlinear time series and principal component analysis: a potential diagnostic tool for COVID-19 auscultation / V. Raj, A. Renjini, MS. Swapna, et al // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – V. 140. – P. 110246. – DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110246.
2. Вовк, И. В. Природа шумов дыхания и их мультифрактальные свойства / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура // Акустический журнал. – 2013. – Т. 59. – № 5. – С. 636–647.
3. Wanliss, J.A. Efficient calculation of fractal properties via the Higuchi method / J. A. Wanliss, G. E. Wanliss // Nonlinear Dynamics. – 2022. – V. 109. – P. 2893–2904.
4. Kantelhardt, J.W. Fractal and multifractal time series / J.W. Kantelhardt. – Halle-Wittenberg: Institute of Physics, Martin-Luther-University (Germany), 2010. – 42 p.
5. Medscape. Доступно в Интернете: <https://emedicine.medscape.com/article/1894146-overview#a3> (дата обращения 13.02.2023).

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 122082400001-8.

### Информация об авторах

**Евдокимова Виктория Вадимовна** – магистрант 1-го года обучения, млад. науч. сотр. лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем Амурского государственного университета. E-mail: vika.evdokimova.0014@inbox.ru.

**Афанасьева Евгения Юрьевна** – канд. мед. наук, млад. науч. сотр. лаборатории функциональных методов исследования дыхательной системы, Дальневосточный научный центр физиологии и патологии дыхания. E-mail: evgeniyananayev@yandex.ru.

**Масловская Анна Геннадьевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: maslovskayaag@mail.ru.

## РАЗРАБОТКА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АДАПТИВНО-РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ С ВХОДНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е. Л. Ерёмин<sup>1</sup>, Л. В. Никифорова<sup>1</sup>, Е. А. Шеленок<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Амурский государственный университет, г. Благовещенск

<sup>2</sup>Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск

**Аннотация.** В работе представлена методика разработки оптимального регулятора периодической системы для объекта с запаздыванием по управлению, которая опирается на критерий гиперустойчивости и метод генетических алгоритмов.

**Ключевые слова:** структурная неопределенность, запаздывание по управлению, периодическая система, критерий гиперустойчивости, генетические алгоритмы

## DEVELOPMENT OF A PERIODIC ADAPTIVE-ROBUST CONTROL SYSTEM FOR A PLANT WITH AN INPUT DELAY

E. L. Eremin<sup>1</sup>, L. V. Nikiforova<sup>1</sup>, E. A. Shelenok<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Amur State University, Blagoveshchensk

<sup>2</sup>Pacific National University, Khabarovsk

**Abstract.** In the present study, a methodology for developing an optimal periodic system controller for a plant with a control delay is proposed, which is based on the hyperstability criterion and the method of genetic algorithms.

**Key words:** structural uncertainty, delay of control, periodic system, hyperstability criterion, genetic algorithms

Развитие современных методов синтеза систем автоматического управления связано, прежде всего, с преодолением возрастающей сложности рассматриваемых объектов, неопределённостью их параметров и структур, наличием запаздываний разного типа и влиянием неконтролируемых внешних возмущений. В работе для синтеза закона управления объектом, который обладает указанными свойствами, используется критерий гиперустойчивости. Поскольку данный критерий позволяет получить структуру управляющего устройства только с нижними оценками параметров, существует задача нахождения их оптимальных значений с точки зрения качества функционирования системы.

Динамика объекта управления описывается в операторной форме

$$a(p)y(t) = b(p)(B(y(t))u(t-h) + f(t)), \quad p^i(0) = y_{i0}, \quad u(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \quad (1)$$

где  $y(t) \in R$  – выход объекта,  $B(y(t))$  – положительно-определенная непрерывная скалярная функция, зависящая от выхода объекта;  $u(t) \in R$  – управление;  $h$  – известное постоянное запаздывание;  $f(t) = f(t+T)$  – постоянная периодическая внешняя помеха,  $|f(t)| \leq f_0 = \text{const}$ ;  $\varphi(\theta)$  – ограниченная непрерывная начальная функция;  $p = p/dt$  – оператор дифференцирования;  $a(p)$ ,  $b(p)$  – нормированные полиномы

$$a(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0, \quad b(p) = p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0. \quad (2)$$

Для объекта управления (1) предполагаются выполненными следующие условия:

1) Прямым измерениям доступен только скалярный выход объекта (1).

2) Многочлен  $b(p)$  – гурвицев.

3) Объект управления (1) является априорно параметрически неопределенным, т.е. коэффициенты многочленов (2) – неизвестные величины, зависящие от набора неизвестных



параметров, принадлежащих известному ограниченному множеству.

4) Объект управления (1) является структурно неопределенным, так как степени многочленов (2)  $n, m$  – неизвестные числа.

5) Относительный порядок объекта управления (1)  $\rho = n - m > 1$  – известная величина, а также известно значение  $n_a$  – максимальная степень многочлена  $a(p)$ .

Структурная неопределенность в объекте управления (1) имеет место при условии  $n_a < n$ . Для её устранения используем многочлен [1]

$$(p + v_0)^{n_a - n}, \quad v_0 = \text{const} > 0,$$

и запишем уравнение объекта (1) в эквивалентной форме

$$c(p)y(t) = d(p)(B(y(t))u(t-h) + f(t)), \quad (3)$$

$$c(p) = a(p)(p + v_0)^{n_a - n} = p^{n_a} + c_{n_a-1}p^{n_a-1} + \dots + c_1p + c_0,$$

$$d(p) = b(p)(p + v_0)^{n_a - \rho} = p^{n_a - \rho} + d_{n_a - \rho - 1}p^{n_a - \rho - 1} + \dots + d_1p + d_0.$$

В пространстве состояний уравнение объекта (3) примет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B_0(B(y(t))u(t-h) + f(t)), \quad y(t) = L^T x(t), x(0) = x_0, u(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0] \quad (4)$$

где  $x(t) \in R^{n_a}$  – вектор состояния,  $x_0 \in R^{n_a}$  – вектор начальных условий;  $A$  – произвольная матрица в форме Фробениуса порядка  $n_a$ ;  $L$  и  $B_0^T = [0, \dots, 0, 1]$  – векторы порядка  $n_a - \rho$  и  $n_a$  соответственно.

Пусть в установившемся режиме желаемое поведение выхода объекта (1) описывается уравнениями явной эталонной модели:

$$\frac{dy_M(t)}{dt} = -a_0 \cdot y_M(t) + r(t), \quad (5)$$

где  $y_M(t) \in R$ ,  $r(t) = r(t+T) \in R$  – периодическое задающее воздействие;  $a_0 = \text{const} > 0$ .

Для компенсации отрицательного влияния запаздыванию по управлению, в рассмотрение вводится упредитель-компенсатор [2]

$$\frac{dy_K(t)}{dt} = -a_0 \cdot y_K(t) + u(t) - u(t-h), \quad (6)$$

где  $y_K(t) \in R$ . Явная эталонная модель (5) и упредитель-компенсатор допускают расширение пространства состояний до размерности  $n_a$ .

Максимальный относительный порядок объекта (3) больше единицы, поэтому в основной контур системы управления последовательно к его выходу подключим фильтр-корректор [3]

$$y_{out}(s) = W_{out}(s)y(s) = \frac{(Ts + 1)^{\rho-1}}{(T_*s + 1)^{\rho-1}} y(s), \quad (7)$$

где  $s$  – переменная Лапласа,  $y_{out}(t) \in R$  – выход фильтра;  $T, T_* = \text{const} > 0$  – известные постоянные,  $T_*$  – достаточно мала.

Знаменатель передаточной функции  $W_{out}(s)$ , поскольку  $T_*$  задается достаточно малой, можно оценить  $(T_*s + 1)^{\rho-1} \cong 1$ .

Тогда, учитывая (3), (7), можно представить

$$y_{out}(t) = \frac{d(p)}{c(p)} \cdot \frac{(Tp + 1)^{(\rho-1)}}{(T_*p + 1)^{(\rho-1)}} u(t-h) = \frac{\tilde{d}(p)}{c(p)} \cdot u(t-h) = \tilde{W}(p) \cdot u(t-h), \quad (8)$$

где  $\tilde{d}(p) = d(p) \cdot (Tp + 1)^{(\rho-1)}$ ,  $\deg \tilde{d} = n_a - 1$ ,  $c(p)(T_*p + 1)^{(\rho-1)} \cong c(p)$ ,  $\deg c(p) = n_a$ ,  $\tilde{W}(p)$  – передаточные функции видоизмененного объекта, с единичным относительным порядком.

Синтезируемый закон управления рассмотрим в виде суммы двух сигналов

$$u(t) = v(t) + \vartheta(t), \quad (9)$$

где  $v(t)$  – адаптивно-робастная составляющая, явный вид которой определяется в результате синтеза системы;  $\vartheta(t)$  – периодическая составляющая, формируемая, подобно [4], с помощью генератора периодических сигналов

$$\vartheta(t) = \vartheta(t - T) + k \cdot z(t), \quad \vartheta(s) = 0, \quad s \in [-T, 0] \quad (10)$$

где  $k = \text{const} > 0$  – коэффициент усиления,  $z(t) = y_M(t) - (y_{out}(t) + y_K(t))$  – сигнал рассогласования.

В процессе синтеза структуры управляющего устройства, обеспечивая выполнение интегрального неравенства критерия гиперустойчивости [1], адаптивно-робастную составляющую закона (8) можно определить как:

$$v(t) = \gamma_1 y_{out}(t) \int_0^t y_{out}(\theta) z(\theta) d\theta + \gamma_2 (y_{out}(t))^2 z(t), \quad (11)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2 = \text{const} > 0$  – параметры регулятора, для нахождения оптимальных значений которых используется генетический алгоритм.

Можно показать, что требования критерия гиперустойчивости выполнены, и найденная структура регулятора (9) – (11), при любых начальных условиях, при действии внешних периодических возмущений обеспечивает  $L$ -диссипативность периодической системы (1), (5) – (7), (9) – (11). После того как структура регулятора (9) найдена, решается задача нахождения оптимальных значений параметров с точки зрения качества функционирования системы.

### Библиографический список

1. Eremin, E. L. Combined Control Law Action for Structurally and Parametrically Uncertain Object with Control Delay / E. L. Eremin, L. V. Nikiforova, Z. D. Pikul // 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). Proceedings IEEE Conference Publications. – Sochi, Russia, 18-22 May 2020. – P. 1–5. – DOI: 10.1109/ICIEAM48468.2020.9112052.
2. Синтез адаптивных систем для скалярных объектов с запаздыванием по управлению / Е. Л. Еремин, Д. А. Теличенко, Л. В. Чепак. – Благовещенск: Изд-во Амурского гос. ун-та, 2006. – 247 с.
3. Еремин, Е. Л.  $L$ -диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурных возмущениях. IV / Е. Л. Еремин // Информатика и системы управления. – 2013. – № 2(36). – С. 100–106.
4. Еремин, Е. Л. Адаптивная периодическая система для объекта с запаздыванием по управлению / Е. Л. Еремин, Д. А. Теличенко, Л. В. Чепак // Информатика и системы управления. – 2008. – № 1(15). – С. 169–178.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00246, <https://rscf.ru/project/23-29-00246>.

### Информация об авторах

**Ерёмин Евгений Леонидович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры информационных и управляющих систем, Амурский государственный университет. E-mail: [ereminel@mail.ru](mailto:ereminel@mail.ru).

**Шеленок Евгений Анатольевич** – д-р техн. наук, доц., доцент кафедры автоматики и системотехники, Тихоокеанский государственный университет. E-mail: [cidshell@mail.ru](mailto:cidshell@mail.ru).

**Никифорова Лариса Владимировна** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры информационной безопасности, Амурский государственный университет. E-mail: [chepak@inbox.ru](mailto:chepak@inbox.ru).

## ОПТИМИЗАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОРЕЖИМНЫМ ОБЪЕКТОМ В СХЕМЕ С НЕЯВНЫМ ЭТАЛОНОМ

Е. Л. Ерёмин<sup>1</sup>, С. А. Смирнова<sup>1</sup>, Е. А. Шеленок<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Амурский государственный университет, г. Благовещенск

<sup>2</sup> Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск

**Аннотация.** Рассматривается задача параметрической оптимизации гибридной комбинированной периодической системы управления объектом, функционирующим в условиях неконтролируемых структурно-параметрических возмущений. Оптимизационное моделирование проводится в среде разработки Matlab-Simulink, где с помощью генетических алгоритмов, осуществляется оценка качества системы управления на основе минимизации критерия обобщенной работы.

**Ключевые слова:** гибридная комбинированная периодическая система управления, многорежимный объект, критерий гиперустойчивости, метод непрерывных моделей, генетический алгоритм

## OPTIMIZATION MODELING OF A HYBRID SYSTEM CONTROL OF A MULTI-MODE PLANT IN A SCHEME WITH AN IMPLICIT REFERENCE

E. L. Eremin<sup>1</sup>, S. A. Smirnova<sup>1</sup>, E. A. Shelenok<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Amur State University, Blagoveshchensk

<sup>2</sup> Pacific State University, Khabarovsk

**Abstract.** The problem of parametric optimization of a hybrid combined periodic control system for a plant operating under conditions of uncontrolled structural-parametric disturbances is considered. Optimization modeling is carried out in the Matlab-Simulink development environment, where, using genetic algorithms, the quality of the control system is assessed based on the minimization of the generalized work criterion.

**Key words:** hybrid combined periodic control system, multi-mode plant, hyperstability criterion, continuous model method, genetic algorithm

Теория гиперустойчивости, благодаря своему универсальному математическому аппарату [1–3], нашла применение при решении задач синтеза современных систем периодического действия [4]. Такие системы, использующие в управляющем контуре генератор периодических сигналов, позволяют поддерживать желаемый (циклический) характер изменения сигнала на выходе динамических объектов.

Необходимо отметить, что в ряде прикладных задач некоторые объекты циклического действия обладают отличительными особенностями, что зачастую существенно затрудняет процесс управления ими. Одна из них – это многорежимность объекта управления, т.е. когда объект способен допускать неконтролируемые параметрические и структурные изменения, вызванные внутренними условиями своего функционирования или воздействием внешней среды. В результате таких изменений (переключений) [5], возникающих в произвольные моменты времени, математическая модель может менять величину относительного порядка объекта, что, как следствие, требует соответствующей коррекции основного контура управления, например – это может быть связано с использованием в схеме регулирования малоинерционных звеньев – фильтр-корректоров [6]. Более того, помимо многорежимности объектов, нормальный режим их функционирования также связан с наличием параметрической

нестационарности, действием внешних неизмеримых помех и неизмеримостью переменных состояний.

Поскольку при разработке современных систем управления необходимо учитывать, что техническая реализация контура управления осуществляется с помощью цифровой техники, структурный синтез непрерывной системы периодического комбинированного управления целесообразно выполнить, аналогично работам [3, 4, 6–8]. Затем с помощью метода непрерывных моделей [9], преобразовать разработанную непрерывную систему в непрерывно-дискретную (гибридную) систему управления, выбирая (исходя из известных рекомендаций [9]) соответствующий шаг дискретизации.

Подчеркнем, что аналитические процедуры критерия гиперустойчивости ориентированы на частичный или полный синтез структуры системы управления, где значения параметров синтезированных систем обычно задаются на этапе имитационного моделирования путем их эвристического подбора и не гарантируют оптимальных результатов. Очевидно, что эффективность функционирования таких систем можно всегда улучшить, если воспользоваться тем или иным методом функциональной оптимизации контура управления. Иначе говоря, требуется определить значения параметров регулятора гибридной периодической комбинированной системы управления нестационарным объектом с переключениями, при которых, в частности, обеспечивается максимально точное слежение выхода объекта за задающим воздействием.

Среди многообразия известных методов можно выделить достаточно перспективное направление – генетические алгоритмы (ГА). Основанный на таких принципах эволюции биологических систем ГА способен обнаружить оптимальные значения параметров контура управления. Использование этого оптимизационного метода осуществляется на основе задания функции приспособленности, позволяющей исключить из выборки нежизнеспособных (неоптимальных) особей (параметров регулятора). В рассматриваемом случае, следуя [4, 7, 8, 10], использовался критерий обобщенной работы:

$$F = \int_0^t \left( a_1 \left( u^{(k)}(\vartheta) \right)^2 + a_2 \left( r(\vartheta) - y^{(k)}(\vartheta) \right)^2 \right) d\vartheta \quad (1)$$

где  $a_1, a_2$  – весовые коэффициенты;  $k$  – количество интервалов времени переключений;  $u^{(k)}(t)$  – сигнал управляющего воздействия;  $r(t), y^{(k)}(t)$  – задающее воздействие и выход системы управления.

Оптимизационное моделирование осуществляется с помощью программной среды Matlab: *во-первых*, в Simulink-модели гибридной комбинированной системы моделирования пакета, сформирован дополнительный блок оценок, для вычислений по критерию (1); *во-вторых*, программный код в виде m-файла, реализует логику работы ГА и задает перечень требуемых начальных параметров; *в-третьих*, по завершению выполнения m-файла формируется вектор оптимальных параметров периодической комбинированной системы управления.

Оптимизация параметров дискретного комбинированного периодического регулятора на базе критерия обобщенной работы (1) позволила отслеживать задающий сигнал с высокой точностью, обеспечивая эффективное функционирование системы.

### Библиографический список

1. Гиперустойчивость автоматических систем / В. М. Попов. – М.: Наука, 1970.
2. Adaptive Control Systems: The Model Reference Approach / I. D. Landau. – N.Y.: Marcel Dekker, 1979.
3. Синтез адаптивных систем управления на основе критерия гиперустойчивости / Е. Л. Еремин, А. М. Цыкунов. – Бишкек: Илим, 1992.
4. Шеленок, Е. А. Периодические системы нелинейного управления в условиях неопределенности: дис. д-ра техн. наук. – Хабаровск. – ТОГУ, 2022.

5. Цыкунов, А. М. Робастное управление линейными объектами с переключениями / А. М. Цыкунов // Проблемы управления. – 2017. – № 4. – С. 2–7.
6. Еремин, Е. Л. L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурных возмущениях. IV / Е. Л. Еремин // Информатика и системы управления. – 2013. – № 2(36). – С. 100–106.
7. Еремин, Е. Л. Синтез системы периодического комбинированного управления одним классом неаффинных объектов с запаздыванием в условиях неопределенности / Е. Л. Еремин, Е. А. Шеленок. // Информатика и системы управления. – 2023. – № 1(75). – С. 103–117.
8. Смирнова, С. А. Оптимизация регулятора самоорганизующейся системы комбинированного управления многорежимным структурно неопределенным объектом с переключениями / С. А. Смирнова // Информатика и системы управления. – 2022. – № 4(74). – С. 131–139.
9. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления / Д. П. Деревницкий, А. Л. Фрадков. – М.: Наука, 1981.
10. Справочник по теории автоматического управления / под. ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987.

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00246, <https://rscf.ru/project/23-29-00246>.

### **Информация об авторах**

**Ерёмин Евгений Леонидович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры информационных и управляющих систем, Амурский государственный университет. E-mail: [ereminel@mail.ru](mailto:ereminel@mail.ru).

**Шеленок Евгений Анатольевич** – д-р техн. наук, доц., доцент кафедры автоматики и системотехники, Тихоокеанский государственный университет. E-mail: [cidshell@mail.ru](mailto:cidshell@mail.ru).

**Смирнова Софья Александровна** – магистрант 2-го года обучения, Амурский государственный университет. E-mail: [sofya-books-1999@mail.ru](mailto:sofya-books-1999@mail.ru).

## СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА НЕАФФИННЫХ ОБЪЕКТОВ

Е. Л. Ерёмин<sup>1</sup>, Е. А. Шеленок<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Амурский государственный университет, Благовещенск

<sup>2</sup>Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

**Аннотация.** Рассматривается решение задачи разработки комбинированного регулятора периодической системы управления для одного класса неаффинных динамических объектов. Основная особенность предлагаемого решения – полноценный синтез системы, при котором на первом этапе с помощью критерия гиперустойчивости осуществляется синтез структуры динамической обратной связи, на втором с применением генетических алгоритмов выполняется автоматический подбор постоянных параметров разработанного регулятора.

**Ключевые слова:** неаффинный объект, критерий гиперустойчивости, нелинейное периодическое управление, структурный синтез, параметрический синтез,  $L$ -диссипативность

## STRUCTURAL AND PARAMETRICAL SYNTHESIS OF NONLINEAR REPETITIVE CONTROL SYSTEM ALGORITHMS FOR ONE CLASS OF NON-AFFINE PLANTS

E. L. Eremin<sup>1</sup>, E. A. Shelenok<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Amur State University, Blagoveshchensk

<sup>2</sup>Pacific National University, Khabarovsk

**Abstract.** Research deals with the synthesis of a combined nonlinear controller for repetitive control of the one class of non-affine dynamic plants. The main feature of the proposed solution is the complete synthesis of a control system. At the first stage, we perform a structural synthesis based on the methods mentioned above. At the second stage, we perform a parametrical synthesis with the help of genetic algorithms to find regulator coefficients for the optimal operation of the control system.

**Key words:** non-affine plant, hyperstability criterion, nonlinear repetitive control, structural synthesis, parametrical synthesis,  $L$ -dissipativity

Рассматривается неаффинный динамический объект, движение которого описывается математической моделью

$$Q(p)y(t) + D(p)y(t - \tau) = G(p)[u(t)F(u(t)) + \varphi(u(t)) + \psi(t)], \quad (1)$$

$$p^i y(v) = \vartheta_i(v), \quad v \in [-\tau, 0], \quad p^i y(0) = y_{i0}, \quad i = 0, 1, \dots, (n-1),$$

где  $p = d/dt$ ;  $y(t), u(t)$  – сигналы выхода и управления;  $Q(p)$ ,  $D(p)$  и  $G(p)$  – линейные операторы:  $\deg Q(p) = n$ ,  $\deg D(p) = (n-1)$ ,  $\deg G(p) = m$ ;  $\tau = \text{const} > 0$ ;  $y_{i0}$  – начальные условия;  $\vartheta_i(v)$  – начальная функция;  $F(u(t))$ ,  $\varphi(u(t))$  – гладкие нелинейные функции;  $\psi(t) = \psi_1(t+T) + \psi_2(t)$  – внешнее возмущение.

Для объекта (1) выполняются допущения:

1) операторы  $Q(p)$ ,  $D(p)$  и  $G(p)$  имеют структуру:

$$\begin{aligned} Q(p) &= p^n + q_1 p^{(n-1)} + \dots + q_n, \quad D(p) = d_1 p^{(n-1)} + d_2 p^{(n-2)} + \dots + d_n, \\ G(p) &= g_0 p^m + g_1 p^{(m-1)} + \dots + g_m, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q_i, d_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, n; g_j = \text{const}, j = 0, 1, \dots, m; n, m = \text{const}; n \geq 1, n > m \geq 0$ , значения  $m$  и  $n$  являются неизвестными;

2) возмущения  $\psi(t)$  и нелинейности  $F(u(t)), \varphi(u(t))$  удовлетворяют ограничениям

$$|\psi_1(t+T)| \leq \psi_{01}, |\psi_2(t)| \leq \psi_{02}, \varphi(u(t)) \leq \varphi_0, F(u(t)) \geq F_0, \forall t \geq 0,$$

где  $\psi_{01}, \psi_{02}, \varphi_0, F_0 = \text{const} > 0$  – неизвестные числа;

3) величина запаздывания  $\tau$  постоянна и неизвестна;

4) значения  $\max(n)$  и  $\max(m)$ , а также максимальная относительная степень объекта  $\delta^* = \max(n) - \min(m)$  – известны;

5) полином  $G(s)$  – гурвицев с положительным старшим коэффициентом,  $s$  – комплексная переменная преобразований Лапласа;

Введем в основной контур системы управления выходной фильтр-корректор, позволяющий, подобно [1], записать соотношение между выходом объекта управления и выходом фильтра в виде

$$y_F(t) = W_F(p)y(t) = \frac{(T_0 p + 1)^{(\delta_* - 1)}}{(T_* p + 1)^{(\delta_* - 1)}} y(t), \quad (T_* p + 1)^{(\delta_* - 1)} y_F(t) = (T_0 p + 1)^{(\delta_* - 1)} y(t), \quad (3)$$

где  $y_F(t), y(t)$  – вход и выход фильтра;  $W_F(p)$  – передаточная функция фильтр-корректора;  $T_0, T_*$  – постоянные времени, причем значение  $T_*$  мало.

С учетом (1) – (3) исходную модель (1) можно представить в расширенном пространстве состояний

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{b}[u(t)F(u(t)) + \varphi(u(t)) + \psi(t)], \quad y_F(t) = \mathbf{g}^T \mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(v) = \mathbf{J}(v), \quad v \in [-\tau; 0], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_{(\delta_* + m)}(t)]^T$ ;  $\hat{\mathbf{Q}}$  – матрица размера  $(\delta_* + m) \times (\delta_* + m)$ , нижняя строка которой имеет вид  $\hat{\mathbf{q}} = [\hat{q}_{(\delta_* + m)}, \dots, \hat{q}_1]$ ;  $\hat{\mathbf{D}}$  – матрица размера  $(\delta_* + m) \times (\delta_* + m)$ , элементы которой – нули за исключением последней строки:  $\hat{\mathbf{d}} = [\hat{d}_{(\delta_* + m)}, \dots, \hat{d}_1]$ ;  $\mathbf{b} = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbf{R}^{(\delta_* + m)}$ ;  $\hat{\mathbf{g}}^T = [\hat{g}_{(\delta_* + m - 1)}, \dots, \hat{g}_0] \in \mathbf{R}^{(\delta_* + m)}$ .

Определяя требуемое поведение объекта управления (1) в виде периодического задающего сигнала  $r(t) = r(t+T)$  и формируя желаемую динамику выхода основного контура системы  $y_F(t)$  за счет аналогичного (3) задающего фильтр-корректора

$$\hat{r}(t) = W_F(p)r(t) = \frac{(T_0 p + 1)^{(\delta_* - 1)}}{(T_* p + 1)^{(\delta_* - 1)}} r(t), \quad (T_* p + 1)^{(\delta_* - 1)} \hat{r}(t) = (T_0 p + 1)^{(\delta_* - 1)} r(t), \quad (5)$$

где  $\hat{r}(t)$  – некоторый вспомогательный сигнал; математическую модель неявной эталонной модели для модифицированного объекта управления (4), принимая во внимание (5), представим следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{x}^*(t)}{dt} = \mathbf{Q}_* \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{b} \hat{\chi}_* \hat{r}(t), \quad y^*(t) = \hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{x}^*(t), \quad \mathbf{x}^*(t_0) = 0, \quad t \geq t_0 = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}^*(t) = [x_1^*(t), \dots, x_{(\delta_* + m)}^*(t)]^T$ ;  $\mathbf{Q}_*$  – матрица размера  $(\delta_* + m) \times (\delta_* + m)$ , последняя строка которой имеет следующий вид:  $(\hat{q}_{(\delta_* + m)} - \chi_* \hat{g}_{(\delta_* + m - 1)}, \dots, \hat{q}_1 - \chi_* \hat{g}_0)$ ;  $\chi_*, \hat{\chi}_* = \text{const} \gg 0$ .

Требуется решить две задачи: во-первых, обеспечить выполнений основной цели

управления  $\lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |r(t+T) - y(t)| \leq \Delta_r$ ,  $\Delta_r = \text{const} > 0$ ; во-вторых, для достижения цели (7) необходимо синтезировать закон управления, обеспечивающий достижение вспомогательной цели управления:  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y^*(t) - y_F(t)| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{r}(t) - y_F(t)| \leq \Delta_{\tilde{r}}$ ,  $\Delta_{\tilde{r}} = \text{const} > 0$ .

С помощью критерия гиперустойчивости, условий  $L$ -диссипативности и результатов [2] можно показать, что достижение поставленных целевых условий (7) и (8) будет обеспечиваться за счет периодического комбинированного регулятора

$$u(t) = (u_1(t-T) + \gamma_1 v(t)) + \gamma_{31} \int_0^t v(\zeta) d\zeta + \gamma_{32} v(t) + \gamma_{21} \text{sat}(y_F(t)) \int_0^t \text{sat}(y_F(\zeta)) v(\zeta) d\zeta + \gamma_{22} \text{sat}(y_F^2(t)) v(t), \quad v(t) = \tilde{r}(t) - y_F(t), \quad (7)$$

где  $\gamma_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{31}, \gamma_{32}$  – положительные константы, значения которых подбираются на этапе имитационного моделирования системы.

Для автоматического поиска значений постоянных параметров синтезированного контура управления (7) был разработан программный модуль, реализующий работу генетического алгоритма, направленного на выполнение критерия качества, относящегося к

семейству критериев обобщенной работы:  $I = \int_0^t \left( k_1 u^2(\zeta) + k_2 (r(\zeta) - y(\zeta))^2 \right) d\zeta \rightarrow \min$ .

На рис. 1 представлены некоторые динамические характеристики системы управления (1) – (3), (5) – (7) полученные в ходе одного из вычислительных экспериментов.

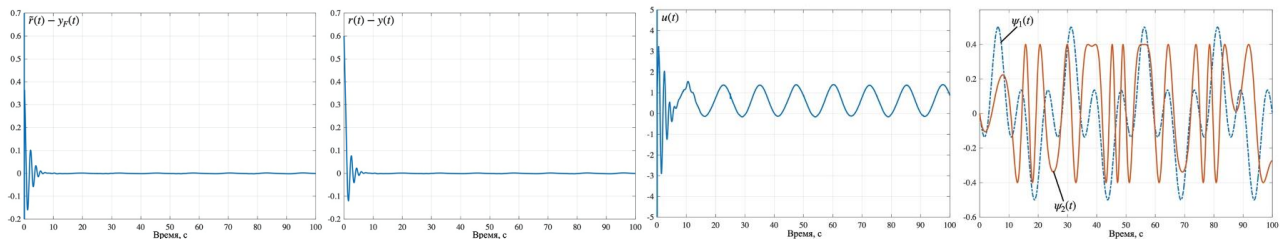


Рисунок 1 – Ошибка по основному контуру, ошибка регулирования, сигнал управления и внешние возмущения системы (1) – (3), (5) – (9)

### Библиографический список

1. Еремин, Е. Л. Комбинированная нелинейная система управления с неявным эталоном для априорно неопределенного неаффинного двухканального объекта с запаздыванием по выходу / Е. Л. Еремин, Л. В. Никифорова, Е. А. Шеленок // Информатика и системы управления. – 2020. – № 1(63). – С. 95–108. – DOI: 10.22250/isu.2020.63.95-108.
2. Nonlinear Systems / Н. К. Khalil. – New Jersey: Prentice Hall, 2002.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00246, <https://rscf.ru/project/23-29-00246>.

### Информация об авторах

**Еремин Евгений Леонидович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры информационных и управляющих систем Амурского государственного университета. E-mail: [ereminel@mail.ru](mailto:ereminel@mail.ru).

**Шеленок Евгений Анатольевич** – д-р. техн. наук, доц., доцент кафедры «Автоматика и системотехника» Тихоокеанского государственного университета. E-mail: [cidshell@mail.ru](mailto:cidshell@mail.ru).



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЛАНКТОННОГО СООБЩЕСТВА С УЧЕТОМ ИЗБИРАТЕЛЬНОСТИ И ТИПА ПИТАНИЯ ЗООПЛАНКТОНА

О. Л. Жданова, И. С. Козицкая

*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** Предложена четырёхкомпонентная модель планктонного сообщества с дискретным временем, в которой зоопланктон представлен хищными и нехищными видами, а фитопланктон отличается по своей пищевой ценности. В работе анализируются условия сосуществования видов, составляющих планктонное сообщество, а также оценивается спектр возможных динамических режимов системы.

**Ключевые слова:** пищевая цепь, эволюция сообщества, система хищник-жертва, конкуренция, функция Холлинга II типа, модель Рикера, режимы динамики, мультистабильность

## MODELING A PLANKTON COMMUNITY DYNAMICS CONSIDERING THE SELECTIVITY AND ZOOPLANKTON FEEDING SPECIFICITY

O. L. Zhdanova, I. S. Kozitskaya

*Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok*

**Abstract.** We propose a four-component discrete-time model of planktonic community, where zooplankton consists of predatory and non-predatory species and phytoplankton differs in its food value. The paper analyzes the coexistence conditions of community species, and evaluates the range of possible dynamic modes of the system.

**Key words:** food chain, community evolution, predator-prey system, competition, type II Holling function, Ricker model, dynamics modes, multistability

Планктон является основой морской пищевой цепи, обеспечивая жизнь многим видам животных, как морских, так и сухопутных. Кроме того, фитопланктон играет ключевую роль в производстве кислорода и поглощении углекислого газа. Понимание динамики планктонных сообществ крайне важно для прогноза рыбного промысла [1], а также предсказания последствий глобальных изменений климата [2]. Наиболее адекватные результаты при моделировании такого важного эффекта как цветение фитопланктона, были получены на основе модификации классической системы взаимодействия фитопланктона и зоопланктона с использованием дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также кусочно-непрерывных функций, описывающих задержку ответной реакции в процессах интоксикации. Системы уравнений с дискретным временем позволяют описывать эффекты запаздывания естественным образом; и хотя они широко используются при моделировании наземных биологических систем [3], при разработке математических моделей планктонных сообществ аппарат рекуррентных уравнений используется крайне редко [4]. Оставаясь в рамках классической для данной области идеологии моделирования, мы предлагаем четырёхкомпонентную модель планктонного сообщества с дискретным временем, которая позволит проанализировать условия сосуществования конкурирующих видов фитопланктона с различной пищевой ценностью под воздействием зоопланктона с отличающимся типом питания и оценить спектр возможных динамических режимов планктонного сообщества.

На основе анализа трофических характеристик зоопланктона биологи, как правило, выделяют два функциональных элемента: «хищный» и «нехищный» зоопланктон [5]. В

группировку «хищного» зоопланктона входят амфиподы, хетогнаты, полихеты, гребневники и медузы. Эври- и фитофаги (мелкие и крупные копеподы и эвфаузииды) составляют группу «нехищного» зоопланктона. Учитывая, что основную часть рациона хищного зоопланктона составляет нехищный, а детрит, фитопланктон и каннибализм играет второстепенную роль [5], будем учитывать изъятие нехищного зоопланктона хищным в модели. Нехищный зоопланктон питается фитопланктоном, который в свою очередь представлен двумя конкурирующими популяциями: токсичным и нетоксичным, при этом последний пригоден в пищу для зоопланктона. Известно, например, что *Copepods* проявляют избирательность при выборе пищи и избегают употреблять фитопланктон, продуцирующий токсины. Учитывая это, будем считать, что нехищный зоопланктон потребляет только нетоксичный вид фитопланктона, токсичный же фитопланктон, представляя нулевую пищевую ценность для зоопланктона, избегает хищничества и только конкурирует за ресурсы с нетоксичным видом. Отметим, что в модель динамики зоопланктона мы не включаем межвидовую конкуренцию мирного и хищного видов, поскольку они характеризуются в большей степени различным типом питания и поэтому их конкурентные взаимоотношения представляются менее значимыми, чем отношения типа «хищник – жертва»; кроме того, будем полагать, что изъятие части популяции жертвы хищником отразится на процессе воспроизводства и в виде уменьшения численности следующего поколения:

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = A \cdot x_{1,n} \exp(-x_{1,n} - \rho \cdot x_{2,n}) \\ x_{2,n+1} = B \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1 \cdot z_{1,n}}{x_2^* + x_{2,n}}\right) \cdot x_{2,n} \exp(-\varphi \cdot x_{1,n} - x_{2,n}) \\ z_{1,n+1} = \frac{w_1 \cdot x_{2,n}}{x_2^* + x_{2,n}} \left(1 - \frac{\alpha_2 \cdot z_{2,n}}{z_1^* + z_{1,n}}\right) \cdot z_{1,n} \exp(-z_{1,n}) \\ z_{2,n+1} = \frac{w_2 \cdot z_{1,n}}{z_1^* + z_{1,n}} z_{2,n} \exp(-z_{2,n}) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – относительные численности токсичного и нетоксичного фитопланктона,  $n$  – номер суток,  $A$  и  $B$  – скорости роста вида  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно;  $z_1$  и  $z_2$  – относительные численности нехищного и хищного зоопланктона,  $w_1$  и  $w_2$  – максимально возможные значения скорости их роста, соответственно;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – среднее значение количества жертв (выраженное в относительных единицах), потребляемое одной (относительной) единицей хищника;  $x_2^*$  и  $z_1^*$  – константы полунасыщения нехищного и хищного зоопланктона, соответственно. Коэффициенты  $\rho$  и  $\varphi$  характеризуют конкурентные взаимоотношения между токсичным и нетоксичным фитопланктоном.

Проведено аналитическое и численное исследование предложенной модели. Показано, что в широкой области биологически содержательных значений параметров возможно сосуществование полного сообщества, представленного конкурирующими видами фитопланктона и двумя видами зоопланктона. Потеря устойчивости нетривиального равновесия, соответствующего существованию полного сообщества, с изменением параметров системы происходит по сценариям Фейгенбаума и Неймарка – Сакера (рис. 1а); что наряду с зигзагообразными колебаниями позволяет наблюдать длиннопериодические колебания численности популяций планктонного сообщества, характерные для наблюдаемой динамики природных популяций (рис. 1б). Отметим, что такое разнообразие сценариев оказалось возможным лишь в модели сообщества, тогда как в исходных уравнениях Рикера, описывающих динамику каждого из взаимодействующих видов, бифуркация Неймарка-Сакера не происходит, в результате наблюдаются лишь зигзагообразные колебания. Изменение внутривидовых параметров представленных в сообществе видов планктона, а также характеристик их межвидового взаимодействия, может значительно изменить динамический режим в сообществе: привести к резкому переходу от регулярной к квазипериодической динамике (обусловлен-

ному реализацией сценария Неймарка-Сакера); вместе с тем, возможна и обратная реализация каскада удвоения периода с возвращением к точным циклам с небольшим периодом или даже к стационарной динамике. В областях мультистабильности изменение начального условия может привести не только к резкому изменению динамического режима, но и состава сообщества.

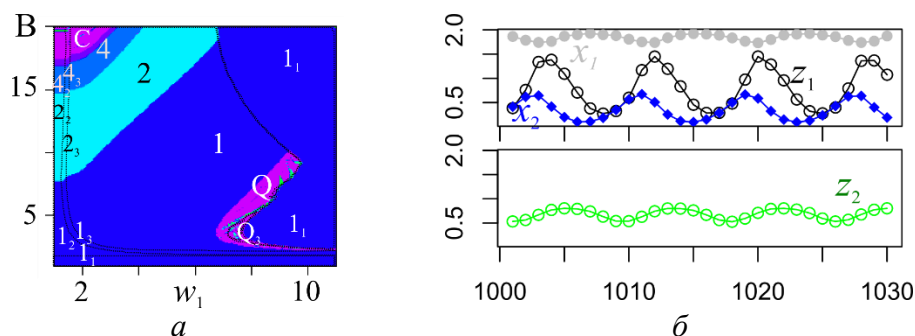


Рисунок 1 – (а) Карта динамических режимов модели (1). Цифры соответствуют длине цикла,  $C$  – хаотическая динамика,  $Q$  – квазипериодическая; индексы соответствуют неполному сообществу: 1 – существует только  $x_1$ , 2 –  $x_1$  и  $x_2$ , 3 –  $x_1$ ,  $x_2$  и  $z_1$ . При  $A=7$ ,  $w_2=2.5$ ,  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.15$ ,  $\rho=0.3$ ,  $\varphi=0.3$ ;  $x_2^*=0.5$ ,  $z_1^*=0.15$ ,  $x_1=0.1$ ,  $x_2=0.1$ ,  $z_1=0.1$ ,  $z_2=0.1$ . (б) Квазипериодическая динамика планктонного сообщества;  $B=5$ ,  $w_1=7.5$

### Библиографический список

1. Русаков, А. В. Математическая модель озерного сообщества с учетом целочисленности размера популяции: хаотические и долгопериодные колебания / А. В. Русаков, А. Е. Бобырев, В. А. Бурменский и др. // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т. 8. – № 2. – С. 229–239. – DOI: 10.20537/2076-7633-2016-8-2-229-239.
2. Paerl, H. W. Climate – blooms like it hot / H. W. Paerl, J. Huisman // Science. – 2008. – V. 320. – P. 57–58. – DOI: 10.1126/science.1155398.
3. Фрисман, Е. Я. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций / Е. Я. Фрисман, М. П. Кулаков, О. Л. Ревуцкая и др. // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т. 11. – № 1. – С. 119–151. – DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
4. Бердников, С. В. Моделирование морских экосистем: опыт, современные подходы, направления развития (обзор). Часть 2. Модели популяций и трофодинамики / С. В. Бердников, В. В. Селютин, Ф. А. Сурков, Ю. В. Тютюнов // Морской гидрофизический журнал. – 2022. – Т. 38. – № 2. – С. 196–217. – DOI: 10.22449/0233-7584-2022-2-196-217.
5. Дулепова Е. П. Динамика продукционных показателей зоопланктона как основы кормовой базы nekтона в западной части Берингова моря / Е. П. Дулепова // Известия ТИНРО (Тихоокеанского научно-исследовательского рыбохозяйственного центра). – 2014. – Т. 179. – С. 236–249. – DOI: 10.26428/1606-9919-2014-179-236-249.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00243, <https://rscf.ru/project/22-21-00243/>.

### Информация об авторах

**Жданова Оксана Леонидовна** – д-р физ.-мат. наук, в.н.с. Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН. E-mail: [axanka@iacp.dvo.ru](mailto:axanka@iacp.dvo.ru).

**Козицкая Ирина Сергеевна** – аспирант 2-го года обучения, Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН. E-mail: [irkozic@gmail.com](mailto:irkozic@gmail.com).

## МЕТОД ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК: ПРОШЛОЕ И БУДУЩЕЕ

В. И. Зоркальцев

*Байкальский государственный университет, Иркутск*

**Аннотация.** Рассматривается семейство алгоритмов оптимизации, осуществляющих улучшение решения среди векторов, удовлетворяющих в строгой форме ограничениям неравенствам. Излагаются истории формирования этих алгоритмов, полученные результаты их теоретического обоснования, опыт использования. Рассматриваются новые варианты алгоритмов внутренних точек, содержащие как частный случай разработанные ранее.

**Ключевые слова:** оптимизация, алгоритмы внутренних точек, модели энергетики

## THE METHOD OF INTERIOR POINTS: PAST AND FUTURE

V. I. Zorkaltsev

Baikal State University, Irkutsk

**Abstract.** We consider a family of optimization algorithms that improve the solution among vectors that satisfy the constraints of inequalities in a strict form. The history of the formation of these algorithms, the results of their theoretical justification, and the experience of using them are presented. New variants of algorithms of internal points containing previously developed as a special case are considered.

**Key words:** optimization, algorithms of interior points, energy models

Рассматриваются алгоритмы решения задач математического программирования, осуществляющих ввод в область допустимых решений и оптимизацию путем итеративного улучшения в множестве векторов, удовлетворяющих ограничениям-неравенствам в строгой форме [1]. Излагается основные этапы истории формирования алгоритмов: метод потенциалов Фриша; идея Канторовича аппроксимации условия дополняющей нежесткости методом наименьших квадратов; алгоритм Дикина; алгоритм Кармаркара. Представлены результаты по обоснованию алгоритмов, накопленный с 70-х годов опыт расчетов на тестовых примерах и моделях энергетики.

Излагаются новые модификации алгоритмов, с неоднозначным заданием направления корректировки решения на каждой итерации. Результаты экспериментальных исследований новых алгоритмов показали, что они примерно на 20 % эффективнее по времени счета ранее использовавшихся. Приведем описание алгоритмов применительно к задаче линейного программирования в стандартной форме и двойственной к ней:

$$c^T x \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0; \quad (1)$$

$$b^T u \rightarrow \max, \quad g(u) \equiv c - A^T u \geq 0. \quad (2)$$

Заданы  $m \times n$  матрица  $A$ , векторы  $b \in R^m, c \in R^n$ . Переменные образуют векторы  $x \in R^n, u \in R^m$

Алгоритм вырабатывает векторы  $x^k$  из  $R^n$  со всеми положительными компонентами. Стартовой точкой может быть любой такой вектор  $x^0$ . На каждой итерации  $k = 0, 1, 2, \dots$  осуществляется следующая последовательность действий.

1) Вычисляем вектор невязок ограничений-равенств задачи (1):

$$r^k = b - Ax^k. \quad (3)$$

2) Определяем вектор весовых коэффициентов  $d^k$  из  $R^n$ , удовлетворяющий неравенствам

$$\bar{\sigma}(x_j^k) \geq d_j^k \geq \underline{\sigma}(x_j^k), \quad j=1, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь  $\bar{\sigma}$ ,  $\underline{\sigma}$  некоторые функции, такие что для  $\alpha > 0$ ,  $\tau > 0$

$$\bar{\sigma}(\alpha) \geq \underline{\sigma}(\alpha) > 0. \quad (5)$$

$$\frac{\bar{\sigma}(\alpha)}{\underline{\sigma}(\tau)} = O\left(\frac{\alpha}{\tau}\right). \quad (6)$$

Например можно воспользоваться правилом

$$d_j^k = (x_j^k)^p, \quad (7)$$

где  $p \geq 1$  – заданный параметр. В этом случае при  $\alpha \geq 0$   $\bar{\sigma}(\alpha) = \underline{\sigma}(\alpha) = \alpha^p$ . В докладе приводятся более эффективные, чем (7) правила, не являющиеся строго функциональными зависимостями только от значений  $x_j^k$ .

3) Определим вектор-функцию  $s^k(\beta)$  со значениями из  $R^n$ , зависящую от вещественного параметра  $\beta$ , как решение вспомогательной задачи:

$$\sum_{j=1}^n c_j^k(\beta) s_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (s_j^2 / d_j^k) \rightarrow \min, \quad As = r^k, \quad (8)$$

с вектором переменных  $s \in R^n$ . Здесь

$$c^k(\beta) = c - \beta y^k, \quad y_j^k = 1/x_j^k, \quad j=1, \dots, n. \quad (9)$$

Для задания вектор-функции  $s^k(\beta)$  достаточно вычислить ее значения в двух точках, так как

$$s^k(\beta) = s^k(0) - \beta s^k(1). \quad (10)$$

Вычисление вектора  $s^k(\beta)$  при двух значениях  $\beta$  сводится к задаче решения двух систем линейных уравнений с одной и той же симметричной неотрицательно определенной матрицей и двумя векторами в правой части системы. В вычислительном отношении такая задача равносильна поиску решения такой же системы с одним вектором в правой части.

Действительно, при любом заданном  $\beta$

$$s^k(\beta) = d_j^k g_j^k(u^k(\beta), \beta), \quad j=1, \dots, n, \quad (11)$$

где вектор  $u^k(\beta)$  является решением задачи безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции относительно вектора переменных  $u \in R^m$ :

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_j^k (g_j^k(u, \beta))^2 - \sum_{i=1}^n r_i^k u_i \rightarrow \min. \quad (12)$$

В (11), (12)

$$g^k(u, \beta) = c^k(\beta) - A^T u. \quad (13)$$

Приравняв градиент целевой функции вспомогательной задачи (12) нулевому вектору получим систему линейных уравнений, у которой от параметра  $\beta$  зависит только вектор в правой части. Причем эта зависимость линейная. В качестве пояснения отметим, что вспомогательная задача (12) является равносильно, симметрично двойственной к исходной вспомогательной задаче (8).

4) Вычисление шага корректировки решения. Пусть  $\gamma$  заданный параметр из открытого интервала  $(0, 1)$ . Например,  $\gamma = 0.9$ . Задано также верхнее значение  $\bar{\beta}$  для определяемого по приводимым ниже правилам значения  $\beta$ . Обозначим  $\lambda_k, \beta_k$  решение

одной из двух задач относительно переменных  $\lambda$  и  $\beta$  для случаев  $r^k \neq 0$  и, соответственно,  $r^k = 0$ .

$$\lambda \rightarrow \max, \quad \lambda s^k(\beta) + \gamma x^k \geq 0, \quad 1 \geq \lambda, \quad \bar{\beta} \geq \beta \geq 0. \quad (14)$$

$$\lambda \sum_{j=1}^n c_j s_j^k(\beta) \rightarrow \min, \quad \lambda s^k(\beta) + \gamma x^k \geq 0, \quad \bar{\beta} \geq \beta \geq 0. \quad (15)$$

Для решения задач (14), (15) может использоваться метод золотого сечения. Отметим, что максимальное значение целевой функции задачи (14), рассматриваемое как неявная функция от переменной  $\beta$ , является вогнутой функцией. Целевая функция задачи (15) при  $\beta$ , с которыми она достигает неположительных значений, является выпуклой неявной функцией от  $\beta$  (причем такие значения  $\beta$  составляют интервал с нижней границей равной нулю).

5) Осуществляется итеративный переход:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k(\beta_k). \quad (16)$$

**Замечания.** 1. Из (15) - (17) следует, что все компоненты вектора  $x^{k+1}$  положительные,

$$x^{k+1} \geq (1 - \gamma) x^k. \quad (17)$$

2. Из условия вспомогательной задачи (8) и итеративного перехода (16) следует, что

$$r^{k+1} \geq (1 - \lambda_k) r^k. \quad (18)$$

Этим объясняет почему в (14) величина шага  $\lambda_k$  ограничена сверху единицей. Пока  $r^k \neq 0$  приведенный алгоритм осуществляет ввод в область допустимых решений. Абсолютные значения каждой компоненты вектора невязок балансовых ограничений сокращается в  $(1 - \lambda_k)$  раз. Учет целевой функции позволяет получать первое допустимое решение более близким к оптимальному.

При  $r^k = 0$ , согласно (18), после итеративного перехода невязки балансовых ограничений должны оставаться нулевыми,  $r^{k+1} = 0$ . На этом этапе будет происходить оптимизация в области допустимых решений, будут выполняться неравенства

$$c^T x^{k+1} < c^T x^k. \quad (19)$$

3. При фиксированном  $\bar{\beta} = 0$  имеем рассматривавшееся ранее семейство алгоритмов метода внутренних точек. В частности, при правиле вычисления весовых коэффициентов (7) для  $p = 2$  получим алгоритм, за которым закрепилось название «affine scaling method».

Для алгоритмов с  $\bar{\beta} = 0$  применительно к процессу оптимизации в области допустимых решений при предположении о невырожденности задачи (1) доказано, что вырабатываемые последовательности векторов  $x^k$ ,  $u^k = u^k(0)$  сходятся не менее чем линейно к относительно внутренним точкам оптимальных решений задач (1) и (2), что является важной для многих приложений особенностью алгоритмов метода внутренних точек. Причем скорость сходимости двойственных переменных будет быстрее, чем скорость сходимости переменных двойственной задачи.

Можно отметить, что более быстрая сходимость двойственных переменных сначала была выявлена на основе опыта использования алгоритмов внутренних точек при реализации моделей энергетики. Затем было получено теоретическое обоснование. Этот факт делает целесообразным для более быстрого получения решения исходной задачи (1) использование двойственных аналогов изложенных алгоритмов в том числе «dual affine scaling method». Для алгоритмов с весовыми коэффициентами (7) при  $p \in [1, 3]$  дано обоснование в общем случае, т.е. для алгоритма сочетающего в едином процессе ввод в область допустимых решений с оптимизацией без предположения о невырожденности задачи. Причем для  $p \in (1, 3]$  было доказано, что скорость сходимости асимптотически не зависит от исходных данных, в том числе, от размерности задачи.

### **Библиографический список**

1. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек / И. И. Дикин, В. И. Зоркальцев. – Новосибирск: Наука, 1980. – 144 с.

### **Информация об авторе**

**Зоркальцев Валерий Иванович** – д-р техн. наук, профессор, зав. Лабораторией Математического моделирования Байкальского государственного университета, E-mail: vizork@mail.ru.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ СМЕРТНОСТИ РЫБ ОЗЕРА БАЙКАЛ НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В. И. Зоркальцев, А. С. Князев

*Байкальский государственный университет, Иркутск*

**Аннотация.** Рассматриваются 13 возможных алгоритмов оценки динамики смертности рыб по результатам случайной их выборки. Цель доклада – изложить методику сравнительного анализа алгоритмов, базирующуюся на обработке результатов многократных вычислительных экспериментов. Исследования осуществляются в рамках общей задачи выбора методов оценки параметров математической модели функционирования экосистемы озера Байкал по располагаемым данным.

**Ключевые слова:** анализ алгоритмов оценки параметров смертности рыб озера Байкал

## COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS FOR ASSESSING THE DYNAMICS OF MORTALITY OF LAKE BAIKAL FISH BASED ON COMPUTATIONAL EXPERIMENTS

V. I. Zorkaltsev, A. S. Knyazev

Baikal State University, Irkutsk

**Abstract.** 13 possible algorithms for estimating the dynamics of fish mortality based on the results of their random sampling are considered. The purpose of the report is to present a methodology for comparative analysis of algorithms based on processing the results of multiple computational experiments. The research is carried out within the framework of the general task of choosing methods for evaluating the parameters of a mathematical model of the functioning of the ecosystem of Lake Baikal based on available data.

**Key words:** analysis of algorithms for estimating mortality parameters of Lake Baikal fish

В докладе излагается методика сравнительного анализа, на базе вычислительного эксперимента, методов обработки данных возрастной структуры случайных выборок рыб озера Байкал (большой голомянки, малой голомянки, байкальского омуля) для определения показателей динамики смертности рыб. Изложим основные аспекты этой методики на примере оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения возраста рыбы. Согласно этому закону, вероятность случайно пойманной рыбе иметь возраст  $t = 1, \dots, T$  лет, выражается зависимостью

$$P_t = A(R)^t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где  $T$  – заданный максимальный возраст дожития,

$$R = \exp(-\Lambda) \quad (2)$$

– условная вероятность дожития до возраста  $t+1$ , для рыбы дожившей до возраста  $t = 1, \dots, T-1$ . Здесь  $\Lambda$  – коэффициент смертности. Из условия, что сумма вероятностей  $P_t$ ,  $t = 1, \dots, T$  равна единице, следует

$$A = (1 - R) / (1 - (R)^T). \quad (3)$$

Отметим, все приведенные показатели однозначно определяются, если задать значение показателей  $R$  из открытого интервала  $(0, 1)$  или некоторое положительное значение  $\Lambda$ .

Обсуждаемая методика сравнительного анализа методов оценки параметров закона вероятностей распределения по возрастам основывается на многократной имитации случайных вы-



борок рыб в заданном количестве  $N$ . Обозначим  $N_{it}$  – количество рыб возраста  $t$  в выборке  $i = 1, \dots, m$ . В проведенных расчетах использовалось количество выборок  $m = 50000$ , что было достаточно для получения устойчивых, однозначных результатов. Случайные выборки, в которых имеют место явные грубые выбросы исключаются из рассмотрения.

Имитация  $m$  выборок осуществляется для зафиксированного значения параметров случайных величин, удовлетворяющих условиям (1) – (3). Для каждой случайной реализации осуществляется оценка параметров закона распределения исследуемым методом. Получаемые оценки параметров  $P, \Lambda$  обозначим  $p_i, \lambda_i, i = 1, \dots, m$ . На основе этих оценок рассчитываются показатели математического ожидания коэффициента смертности

$$M\lambda = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \lambda_i, \quad (4)$$

дисперсия коэффициента смертности

$$D\lambda = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\lambda_i - M\lambda)^2, \quad (5)$$

средний квадрат отклонения от истинного значения параметра

$$Q\lambda = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\lambda_i - \Lambda)^2, \quad (6)$$

частоту попадания значений  $\lambda_i$  в 10% интервалы от математического ожидания и от истинного значения оценок  $\lambda$ . В знаменателе первого коэффициента в (5) и (6) вместо  $m$  можно использовать число  $m-1$ , что гарантирует несмещенность оценок дисперсии. Поскольку используется большое число  $m$ , то разница малосущественная в численном отношении. Если возникнут предложения, то можно приведенные показатели качества метода оценки параметров дополнить и другими показателями.

Отметим, что величина  $M\lambda - \Lambda$ , определяемая как величина смещения математического ожидания  $\lambda_i$ , на которую есть смысл корректировать получаемую изначально оценку  $\lambda_i$ . Модифицированный таким образом метод будет иметь несмещенную оценку параметра, для которого средний квадрат отклонения от истинного значения совпадет со значением дисперсии (5).

В докладе приводятся результаты исследования пяти классов методов. В четырех из них используются положительные весовые коэффициенты  $h_t$  в трех вариантах:

1) неизменные во времени

$$h_t = 1/(T-1), \quad t = 1, \dots, T, \quad (7)$$

2) пропорционально оценкам вероятности  $P_t$

$$h_t = P_t / \sum_{\tau=1}^{T-1} P_\tau, \quad t = 1, \dots, T, \quad (8)$$

3) пропорционально обратным значениям оценок дисперсии случайных величин  $P_t$

$$h_t = (1/P_t(1-P_t)) / \left( \sum_{\tau=1}^{T-1} \left( \frac{1}{P_\tau(1-P_\tau)} \right) \right), \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

Согласно этим правилам во всех трех вариантах сумма первых  $T-1$  весовых коэффициентов равна единице, что важно для первых двух рассматриваемых классов методов.

В правилах (8), (9) задаются весовые коэффициенты, зависящие от значений величин  $P_t$ , которые предстоит определить с использованием этих весовых коэффициентов. Это достигается применением специальной итеративной процедуры, включающей на каждой итерации оценку вероятностей  $P_t$  и, затем, пересчет с использованием этих оценок весовых коэффициентов по формулам (8) или (9) пока оценки вероятностей  $P_t$  на соседних итерациях не совпадут с заданной точностью. Соответственно совпадут и значения весовых коэффици-

ентов. В качестве исходного начального приближения в обоих случаях используются одинаковые, определяемые по формуле (7) весовые коэффициенты.

Приведем расчетные формулы рассматриваемых в докладе методов оценки параметров. В этих описаниях индекс номер выборки  $i$  опущен. Весовые коэффициенты здесь представлены в общем виде, как определяемые по любому из правил (7), (8), либо (9). В этих описаниях используются относительные величины

$$n_t = N_t / N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (10)$$

$$q_t = N_{t+1} / N_t, \quad t = 1, \dots, T-1. \quad (11)$$

1) Оценка условной вероятности дожития до следующего года в виде взвешенной средней арифметической,

$$r = \sum_{t=1}^{T-1} h_t q_t. \quad (12)$$

2) Оценка условной вероятности дожития до следующего года в виде взвешенной средней геометрической,

$$r = \prod_{t=1}^{T-1} (q_t)^{h_t}. \quad (13)$$

Исходя из полученных по правилам (12) или (13) оценки  $r$  можем, согласно (2), определить  $\lambda = -\ln p$ .

3) Оценка с использованием метода наименьших квадратов в логарифмической шкале: найти значения переменных  $\alpha, \lambda$  в результате безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \sum_{t=1}^T h_t (\ln n_t - \alpha - t\lambda)^2. \quad (14)$$

Исходя из (2), (3) определяются значения

$$r = \exp(-\lambda), \quad (15)$$

$$a = (1-r) / (1-(r)^T). \quad (16)$$

4) Оценка методом наименьших квадратов в исходной шкале: найти минимум функции

$$f(\lambda) = \sum_{t=1}^T (n_t - a(\lambda) \exp(-\lambda t))^2, \quad (17)$$

где

$$a(\lambda) = (1 - r(\lambda)) / (1 - (r(\lambda))^T), \quad (18)$$

$$r(\lambda) = \exp(-\lambda), \quad (19)$$

Для минимизации функции  $f$  использовался метод золотого сечения.

5) Метод максимального правдоподобия. В докладе приводятся расчетные формулы этого метода и их обоснование. Этот метод не использует весовые коэффициенты. Поскольку первые три метода рассматриваются с тремя вариантами весовых коэффициентов, то в конечном итоге имеем для сравнения 13 вариантов алгоритма оценки параметров.

В докладе будут представлены результаты анализа вариантов алгоритмов на основе данных [1] об распределении по возрастам в экспериментальных отловах за 8 лет большой и малой голомянки, которые являются основными по биомассе рыбами озера Байкал. Эти расчеты иллюстрируют изменения точности оценок параметров в зависимости от объема выборки. Результаты расчетов позволяют сопоставлять между собой различные методы. В частности, они показали, что для первых трех методов предпочтительнее использование второго из приведенных здесь способа взвешивания. Для четвертого метода некоторые преимущества дает третий способ взвешивания. Устойчиво наилучшие оценки по всем рассматриваемым показателям дает применение четвертого и пятого методов оценки параметров.

В докладе планируется рассмотреть некоторые направления развития излагаемого подхода к сравнительному анализу методов оценки параметров динамики смертности в том числе в результате использования вместо неизменного по возрастам коэффициента смертно-

сти  $\lambda$  коэффициента зависящего от возраста  $t$ . С разделением на два типа причин этого: 1) естественные изменения коэффициента смертности с возрастом; 2) наличие крупных возмущающих воздействий (антропогенного или природного характера) на объемы данного вида рыб в отдельные года прошлых периодов. Будут приведены также варианты методики, учитывающие возможные случайные погрешности в оценках возраста рыб.

#### **Библиографический список**

1. Голомянки Байкала / Г. В. Стариков. – Новосибирск: Наука. Сиб.отд-ние, 1977. – 93 с.

#### **Информация об авторах**

**Зоркальцев Валерий Иванович** – д-р техн. наук, проф., профессор, зав. Лабораторией Математического моделирования Байкальского государственного университета, E-mail: vizork@mail.ru.

**Князев Александр Сергеевич** – аспирант, зам. начальника управления цифровизации и информационно-технического обеспечения Байкальского государственного университета, E-mail: 010193@bgu.ru.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ МОРСКИХ ОРГАНИЗМОВ, ИЗМЕНЯЮЩИХ ПОЛ

Е. С. Исаева<sup>1</sup>, А. А. Громыко<sup>2</sup>, Г. П. Неверова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

<sup>2</sup> Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

**Аннотация.** В работе предложен комплекс математических моделей с дискретным временем, ориентированных на описание динамики популяций морских видов, а именно рыб и моллюсков, особи которых изменяют пол в процессе взросления. Проведено аналитическое и численное исследование предложенных моделей. Показано, что при протогинии существенный вклад в лимитирование рождаемости со стороны самцов приводит к возникновению квазипериодических колебаний.

**Ключевые слова:** математические модели с дискретным временем, исследование на устойчивость, параметрический анализ, бифуркационный анализ, динамические режимы

## MATHEMATICAL MODELING OF POPULATION DYNAMICS OF SEX-CHANGING MARINE ORGANISMS

E. S. Isaeva<sup>1</sup>, A. A. Gromyko<sup>2</sup>, G. P. Neverova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Vladivostok

<sup>2</sup> Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Abstract.** We propose discrete-time mathematical models describing dynamics of marine species populations, whose individuals can change sex. We analytically and numerically study the proposed models. In the case of protogyny, a significant contribution of males to birth limitation is shown to bring about the appearance of quasi-periodic fluctuations.

**Key words:** mathematical models with discrete time, stability study, parametric analysis, bifurcation analysis, dynamic modes

У некоторых видов животных особи могут изменять пол, что позволяет популяции более успешно адаптироваться к условиям среды, повышая ее шансы на выживание. Изучению этого феномена посвящено большое количество работ, которые, преимущественно акцентируются на биохимической составляющей процесса, например [1]. При этом особенности популяционной динамики таких видов с помощью методов математического моделирования, как правило, не рассматриваются. В данной работе предложены математические модели с дискретным временем, ориентированные на описание динамики видов, особи которых меняют пол в процессе взросления; особи, сменив пол при достижении определенного возраста, далее существуют в новой форме.

Предполагается, что на начало очередного сезона размножения популяция представлена двумя группами: самцами и самками; при этом уровень рождаемости определяется только количеством самок, однако присутствует плотно-зависимое лимитирование рождаемости, обусловленное внутривидовой конкуренцией за ресурсы. Введем следующие обозначения  $X$  – численность самок,  $Y$  – численность самцов,  $n$  – номер периода размножения, функция  $a(X, Y)$  характеризует скорость роста популяции,  $d$  ( $0 \leq d \leq 1$ ) описывает долю самок/самцов, которые не поменяли пол,  $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) коэффициент выживаемости самок,  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq 1$ ) – коэффициент выживаемости самцов. Функция  $a(X, Y)$  выбрана по аналогии с моделью Рикера в виде  $a(X, Y) = ae^{-\alpha X - \beta Y}$ , где  $a$  – репродуктивный

потенциал популяции с учетом выживаемости новорожденных самцов;  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют интенсивность снижения рождаемости в результате конкуренции за ресурсы между самцами и самками; функция  $a(X, Y)$  монотонно убывает и стремится к нулю при бесконечном возрастании аргументов. Отметим, что модель Рикера хорошо подходит для описания процессов лимитирования в популяциях, характеризующихся  $r$ -стратегией размножения. В рамках работы рассматриваются следующие формы последовательного гермафродитизма: протогиния и протандрия.

**Изменение пола в процессе взросления: протогиния.** На сегодняшний день известно более 350 видов рыб, особи которых меняют пол – это представители семейств губановых (Labridae), рыб-попугаев (Scaridae), групперов (Serranidae), помацентровых (Pomacentridae) и некоторых других [2]. У многих из них все мальки, вылупляющиеся из икринок, – самки, которые, созревая, принимают участие в размножении один или несколько раз, а затем превращаются в самцов и вновь принимают участие в размножении. Такая форма последовательного гермафродитизма называется протогинией. Таким образом, динамика численности описанных видов определяется процессами рождаемости и смертности, и на начало очередного сезона размножения может быть представлена двумя группами: самками и самцами. Группа самок представлена численностью новорожденных особей и выживших самок, которые еще не поменяли пол. Группа самцов включает в себя выживших самцов и тех самок, что к началу данного сезона размножения поменяли пол. Динамика численности такой популяции может быть описана двухкомпонентной моделью с дискретным временем, которая имеет вид:

$$\begin{cases} X_{n+1} = a(X_n, Y_n) \cdot X_n + sdX_n \\ Y_{n+1} = s(1-d) \cdot X_n + vY_n \end{cases} \quad (1)$$

Модель (1) имеет две неподвижные точки: тривиальную и нетривиальную. Найдены условия устойчивости этих решений на основе анализа значений собственных чисел характеристического многочлена системы (1). Потеря устойчивости нетривиальной неподвижной точки системы (1) происходит по двум сценариям. При этом сценарий потери устойчивости определяется значением параметра  $\beta$ . При  $\beta < \alpha(v^2 + 2v + 1) / (vs + 3s - ds(v + 3))$  потеря устойчивости реализуется через каскад бифуркаций удвоения периода. При  $\beta > \alpha(v^2 + 2v + 1) / (vs + 3s - ds(v + 3))$  потеря устойчивости происходит по сценарию Неймарка-Сакера, т.е. возникает инвариантная кривая. Построены модельные траектории при значениях коэффициентов из разных областей параметрических портретов. Показано, что существенный вклад в лимитирование рождаемости со стороны самцов приводит к возникновению квазипериодических колебаний.

**Изменение пола в процессе взросления: протандрия.** Протандрия наблюдается у видов особи которых рождаются самцами, а затем становятся самками, т.е. с течением времени часть самцов, повзрослев, меняет пол, пополняя группу самок. Примером таких видов являются рыбы-клоуны (род *Amphiprion*) и моллюски, например морские туфельки *Crepidula fornicata*. Морские туфельки *Crepidula fornicata* были случайно завезены в Европу в конце XIX века из Северной Америки; не имея на этой территории естественных врагов, моллюски быстро распространились, став вредителем устричных плантаций. Следовательно, моделирование динамики и понимание механизмов изменения численности подобных видов имеет практическую значимость [3].

Динамика численности таких видов также определяется рождаемостью и смертностью, при этом на воспроизводство оказывают влияние процессы смены пола, а именно за один шаг во времени часть самцов повзрослев, меняет пол, пополняя группу самок. Таким образом, группа самцов на начало очередного сезона размножения представлена численностью новорожденных особей и выживших самцов, что еще не поменяли пол. Группа самок включает в себя выживших «старых» самок и тех самцов, что к началу данного сезона размножения поменяли пол. Дополнительно предполагается, что самцов всегда достаточно и численность новорожденных самцов определяется только числом самок, при этом осуществляется плотностная регуляция рождаемости: с увеличением

численности популяции наблюдается снижения рождаемости в силу конкуренции особей за ресурсы. Динамика численности такой популяции может быть описана следующей двухкомпонентной моделью с дискретным временем:

$$\begin{cases} X_{n+1} = v(1-d) \cdot Y_n + sX_n \\ Y_{n+1} = a(X_n, Y_n) \cdot X_n + vdY_n \end{cases} \quad (2)$$

Проведено аналитическое исследование модели (2). Показано что система (2) имеет две неподвижные точки: тривиальную, соответствующую гибели популяции, и нетривиальную. Найдены условия устойчивости этих решений. Построены параметрические портреты, соответствующие областям устойчивости неподвижных точек при вариации значений параметров, характеризующих выживаемость. В частности, показано, что рост значений параметра  $s$  сужает область устойчивости тривиального решения. Чем ниже значения параметра  $d$ , тем при более низких значениях скорости роста популяции возникают колебания численности. Построенные карты динамических режимов демонстрируют потерю устойчивости по двум сценариям. С ростом значений параметра  $a$ , характеризующего репродуктивный потенциал популяции, наблюдаются бифуркационные переходы от стационарного состояния либо к квазипериодическим, либо двухлетним колебаниям. В целом же, можно заключить, что в модели динамики популяции с изменяющимся половым составом при увеличении потенциальных репродуктивных возможностей особей с учетом регуляции рождаемости возникают колебания численности, имеющие весьма сложную временную организацию. Также показано, что в модели возникает мультистабильность: при вариации начального условия притягивающими оказываются разные динамические режимы.

Таким образом, на основе исследования предложенных моделей показано, что в популяциях, динамика которых может быть описана подобными системами, возможно возникновение колебаний, как регулярных, так и нерегулярных. Также возможна смена наблюдаемого режима динамики в силу вариации текущего состава популяции из-за влияния внешних факторов. Однако с ростом значений коэффициента  $d$  бассейн притяжения устойчивого нетривиального равновесия расширяется и стремится захватить все фазовое пространство, т.е. зона параметрической устойчивости популяции значительно увеличивается.

### Библиографический список

1. Todd, E. V. Stress, novel sex genes, and epigenetic reprogramming orchestrate socially controlled sex change / E. V. Todd, O. Ortega-Recalde, H. Liu, M. S. Lamm, K. M. Rutherford, H. Cross, N. J. Gemmell // *Science Advances*. – 2019. – V. 5 (7). – eaaw7006.
2. Munday, P. L. Changing sex / P. L Munday // *Nature Australia*. – 2000. – V. 26 (11). – P. 50–59.
3. Henry, J. Q. Molluscan models: *Crepidula fornicata* / J. Q. Henry, D. C. Lyons // *Current Opinion in Genetics & Development*. – 2016. – V. 39. – P. 138–148. – DOI: 10.1016/j.gde.2016.05.021.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00243, <https://rscf.ru/project/22-21-00243/>.

### Информация об авторах

**Неверова Галина Петровна** – д-р физ.-мат. наук, с.н.с., Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. E-mail: galina.nev@gmail.com.

**Исаева Елизавета Сергеевна** – студент 1-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: isaeva.es@dvfu.ru.

**Громыко Артем Артурович** – студент 1-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: gromiko.aa@dvfu.ru.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЭРЕДИТАРНОЙ ДВУМОДОВОЙ МОДЕЛИ ДИНАМО

Е. А. Казаков, Г. М. Водинчар

*Институт космифизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
Паратунка, Камчатский край*

**Аннотация.** Доклад посвящен обсуждению результатов вычислительных экспериментов с эредитарной динамической системой являющейся моделью двумодового гидромагнитного динамо. Численно исследованы динамические режимы, возникающие при варьировании управляющих параметров. С помощью расчета Ляпуновских показателей выделены области, соответствующие регулярной и хаотической динамике. Рассматривались случаи, когда эредитарная обратная связь с системе возникала мгновенно или с задержкой. Результаты моделирования показали, что исследуемая модель воспроизводит ряд динамических режимов характерных для реальных космических динамо систем.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, эредитарность, гидромагнитное динамо

## SIMULATION OF STANDARD REGIMES IN AN HEREDITARY SERIAL DYNAMO MODEL

E. A. Kazakov, G. M. Vodinchar

*Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka,  
Kamchatka region*

**Abstract.** The report is devoted to a discussion of the results of computational experiments with a hereditary dynamical system, which is a model of a two-mode hydromagnetic dynamo. The dynamic regimes that arise when the control parameters are varied are numerically investigated. Using the calculation of the Lyapunov exponents, the areas corresponding to regular and chaotic dynamics are identified. Cases were considered when hereditary feedback to the system occurred instantly or with a delay. The simulation results showed that the model under study reproduces a number of dynamic modes typical for real space dynamo systems.

**Key words:** mathematical modeling, heredity, hydromagnetic dynamo

Теория гидромагнитного динамо успешно описывает существование крупномасштабных магнитных полей космических объектов (планет, звезд и галактик) [1]. Реальные космические динамо-системы демонстрируют большое разнообразие сложных динамических режимов: квазистационарные, квазирегулярные и хаотические колебания, всплески, васциляции (колебания вокруг ненулевого уровня), инверсии и т.п. [1, 2]. Одним из направлений работ по динамо-системам является учет в моделях памяти (эредитарности). Установлено, что эффекты оказывают значительное влияние на результаты моделирования (см., например [3, 4]). Для воспроизведения в моделях реализаций поля, сравнимых по длительности со временем существования космических объектов, приходится ограничиваться маломодовыми приближениями. Предельно возможное усечение числа мод приводит к двумодовым моделям.

Авторами была разработана двумодовая эредитарная модель динамо в виде следующей интегро-дифференциальной системы [5–7]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\eta^T x + y \left[ \eta^T - \frac{p}{s^2} \int_0^t K(t-\tau) Q(x(\tau)y(\tau)) d\tau \right], \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x \left[ D - \int_0^t K(t-\tau) Q(x(\tau)y(\tau)) d\tau \right].\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $x(t)$  и  $y(t)$  представляют собой амплитуды тороидальной и полоидальной компонент поля, положительные коэффициенты  $\eta^T$ ,  $s$ ,  $p$ ,  $D$  являются управляющими параметрами модели. Доказательство существования и единственности решения системы (1) при произвольных начальных условиях приведено в работе [7]. Физический смысл интегрального члена – это память в обратной связи динамо-системы, когда подавление генерации магнитного поля обеспечивается взвешенной по прошлым состояниям функцией  $Q(x, y)$  от компонент поля. В реальной физической динамо-системе обратная связь обеспечивается силой Лоренца, которая квадратична по полю. Поэтому функция  $Q(x, y)$  будем считать некоторой квадратичной формой своих аргументов, т.е.  $Q(x, y) = Ax^2 + 2Cxy + Ay^2$ , где  $A, B$  – некоторые постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно.

Интегральный член является признаком эрмитности модели (1). В то же время его можно исключить для некоторых типов ядер с экспоненциальной асимптотикой за счет расширения размерности фазового пространства модели. Точнее говоря, если ядро является решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то система (1) равносильна некоторой дифференциальной системе.

Представляет интерес динамика решений для ядер вида  $K(t) = t^n e^{-bt}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . В этом случае мы можем говорить о задержке в обратной связи, так как ядро нулевой в начале координат, причем с ростом показателя степени подавление мало зависит от значения компонент поля в моменты близкие к настоящему времени.

В представляемой работе мы исследовали типы динамических режимов в модели для вышеуказанных видов ядер на предмет регулярных и хаотических режимов. Для этого выполнялся расчет показателей Ляпунова. Мы провели исследования систем с ядрами  $K(t) = t^n e^{-bt}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ . Результаты моделирования представлены картами динамических режимов. Например систем, для ядра  $K(t) = e^{-bt}$  для функции подавления спиральностью поля  $Q(x, y) = 2Cxy$  рис. 1(а) и функция подавления энергией поля  $Q = Ax^2 + Ay^2$  рис. 1(б).

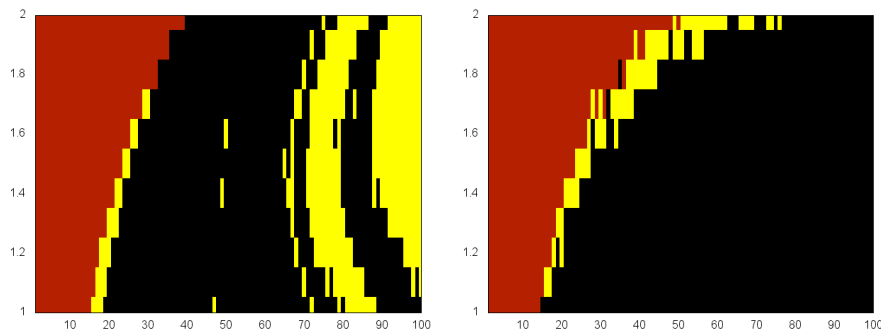


Рисунок 1 – Карта динамических режимов для систем с ядром  $K(t) = e^{-bt}$ : а) с функцией подавления спиральностью поля б) с функцией подавления энергией поля

Пример 2. В качестве ядра интегрального оператора возьмем  $K(t) = te^{-bt}$ . Для системы с подобным ядром построим карты динамических режимов.



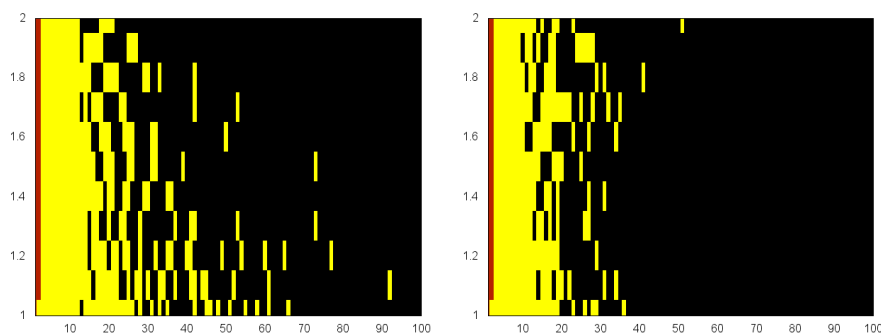


Рисунок 2 – Карта динамических режимов для систем с ядром  $K(t) = te^{-bt}$ : а) с функцией подавления спиральностью поля б) с функцией подавления энергией поля

На рис. 1 и 2 красным цветом обозначены области, где происходит выход на стационарный режим. Желтым цветом показаны зоны периодичности. Черным, области хаотического поведения системы.

### Библиографический список

1. Магнитные поля в астрофизике / Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов. – М.: Ижевск: НИЦ «РХД», 2006.
2. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle / R. T. Merrill, M. W. McElhinny, P. L. McFadden. – London: Academic Press, 1996.
3. Brandenburg, A. Memory effects in turbulent transport / A. Brandenburg // *Astrophysical Journal*. – 2009. – V. 706. – P. 712–726.
4. Hori, K. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity / K. Hori, S. Yoshida // *Geophysical and Astrophysical fluid Dynamics*. – 2008. – V. 102. – P. 601–632.
5. Vodinchar, G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale  $\alpha\omega$ -Dynamo / G. Vodinchar // *Mathematics*. – 2020. – T. 8(11). – P. 2065. – DOI: 10.3390/math8112065.
6. Казаков, Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо / Е. А. Казаков // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. – 2021. – Т. 35(2). – С. 40–47. – DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47.
7. Казаков, Е. А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью / Е. А. Казаков // *Вычислительные технологии*. – 2022. – Т. 27(6). – С. 19–32. – DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.003.

### Благодарности

Исследования выполнены в рамках гранта РФФИ № 22-11-00064 по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности»

### Информация об авторах

**Казаков Евгений Анатольевич** – ведущий программист Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: mifistjohn@gmail.com.

**Водинчар Глеб Михайлович** – канд. физ.-мат. наук, в.н.с. Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: gvodinchar@gmail.com.

## АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ПИЩЕВЫМИ ПРИВЫЧКАМИ И ОБЩИМ СОСТОЯНИЕМ ЗДОРОВЬЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ ИЗ «EATING & HEALTH MODULE DATASET»

Э. А. Капелько, Е. А. Зайченко, Е. А. Зубков

*Белорусско-Российский университет, Могилев*

**Аннотация.** В данной работе проведен множественный линейный регрессионный анализ The Eating & Health Module Dataset, построены графики зависимости отдельных индексов, а также матрица корреляций.

**Ключевые слова:** ATUS, питание, корреляция

## ANALYSIS OF THE RELATIONSHIP BETWEEN DIFFERENT EATING HABITS AND OVERALL HEALTH USING DATA FROM THE "EATING & HEALTH MODULE DATASET"

E. A. Kapelko, E. A. Zaichenko, E. A. Zubkov  
Belarusian-Russian University, Mogilev

**Abstract.** In this paper, a multiple linear regression analysis of The Eating & Health Module Dataset was carried out, graphs of the dependence of individual indices and a correlation matrix were constructed.

**Key words:** ATUS, nutrition, correlation

Множественный линейный регрессионный анализ – метод установления зависимости одной переменной от двух или более независимых переменных. Данный метод используется в статистике для установления зависимостей, особенно хорошо проявляя себя в линейных задачах, представимых в виде уравнения первой степени. В данной работе будет рассмотрен пример использования этого метода для получения информации из данных TE&HM.

The Eating & Health Module Dataset (набор данных модуля "Питание и здоровье") содержит данные о различных привычках в еде и общем состоянии здоровья. В модуле EH 2014-16 годов респондентам ATUS (American Time Use Survey, исследование использования времени в Америке) задаются вопросы о вторичном питании, то есть приеме пищи во время выполнения другого вида деятельности; потреблении безалкогольных напитков; предпочтениях при покупке продуктов питания и фаст-фуда; методах приготовления пищи и безопасности пищевых продуктов; участии в продовольственной помощи; общем состоянии здоровья, росте и весе, физических упражнениях; и доходе. Для изучения взаимосвязи между этими переменными был проведен множественный линейный регрессионный анализ этих данных. Зависимой переменной был "eugenhth", представляющий общее состояние здоровья, а все остальные столбцы использовались в качестве независимых переменных. В качестве языка разработки был выбран python 3.10, логика кода реализована с помощью pandas, sklearn, scipy, графический вывод сделан на matplotlib.

Результаты анализа показали, что наиболее положительно коррелирующими коэффициентами с общим состоянием здоровья ("eugenhth") были "etwgt", "eumeat", "eeincome1" и "euedur24".

"eugenhth": "Общий рейтинг здоровья" и указывает на то, как респондент воспринимает свое общее состояние здоровья. Это категориальная переменная со значениями в диапазоне от 1 (отлично) до 5 (плохо).

""etwgt": представляет вес респондента в фунтах.

"eumeat": количество мяса, птицы, рыбы и морепродуктов, съеденных респондентом за 24-часовой период.

"" eeincome1": доход семьи из всех источников за предыдущий год. Это категориальная переменная со значениями в диапазоне от 1 (менее 5000 долларов) до 17 (более 200 000 долларов).

"euedur24": продолжительность эпизода активности в минутах для конкретного вида деятельности.

Эти переменные имеют положительную взаимосвязь с общим состоянием здоровья. С другой стороны, наименее положительно коррелированными коэффициентами были "ethgt", "eudrink", "eusnap", "eusoda" и "eugroshp". Эти переменные, по-видимому, имеют отрицательную связь с общим состоянием здоровья.

"ethgt": Рост респондента в дюймах. "eudrink": Время, потраченное на выпивку в течение дня дневника, в минутах. "eusnap": Время, проведенное во сне, в минутах. "eusoda": количество порций газировки, шипучки или напитков с фруктовым вкусом, выпитых в течение дня в дневнике. "eugroshp": Время, потраченное на покупку продуктов, в минутах.

Основываясь на этих результатах, можно сделать вывод, что определенные пищевые привычки положительно или отрицательно связаны с общим состоянием здоровья. Например, потребление мяса ("eumeat"), по-видимому, имеет положительное отношение к самочувствиям респондентов.

Результирующий график на рис.1 показывает, как точки данных распределены в двумерном пространстве. Каждый шестиугольник представляет область, в которой агрегируют точки данных, а его цвет указывает на плотность точек в пределах этой области. Чем темнее цвет, тем выше плотность точек.

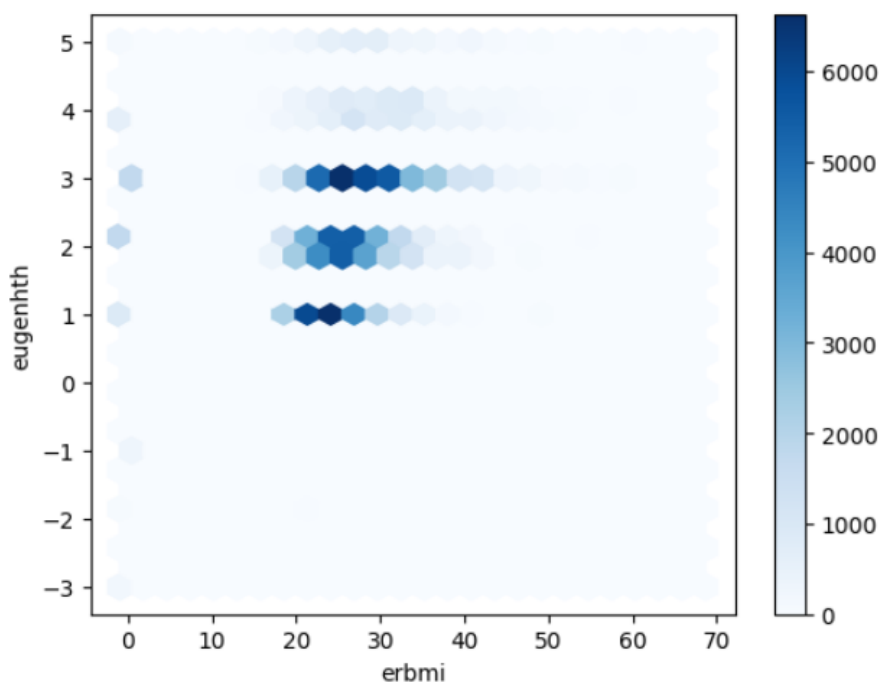


Рисунок 1 – График зависимости eugenhth от erbmi

По горизонтальной оси расположен "erbmi" (индекс массы тела), по вертикальной – eugenhth (Общий рейтинг здоровья). В данном распределении точек данных мы можем отметить корреляцию между индексами и тенденцию к понижению самочувствия с повышением индекса массы тела.

Также была построена матрица корреляций между всеми индексами датасета, представленная на рис.2.

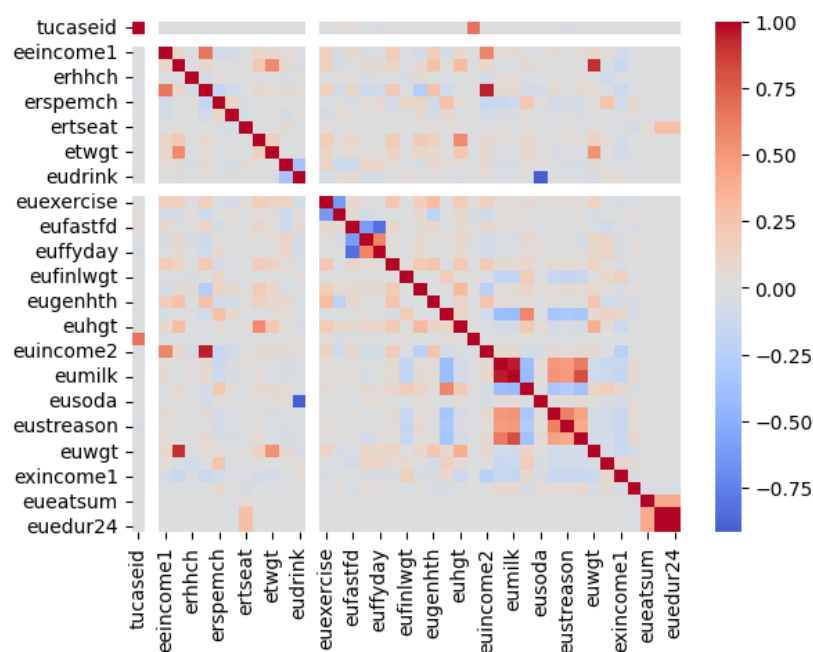


Рисунок 2 – Матрица корреляций

Основываясь на результатах множественного линейного регрессионного анализа взаимосвязи между различными факторами, такими как привычки в еде, здоровье и доход можем сделать вывод о наличии корреляции между отдельными параметрами используемого датасета. Следовательно, можно говорить об успешной реализации данного метода, а также о его применимости в задачах анализа подобных задач в целом.

### Библиографический список

1. Описание датасета Eating and Health Module (ATUS). Доступно в Интернете: <https://www.ers.usda.gov/data-products/eating-and-health-module-atus/> (дата обращения: 12.03.2023).
2. Применение линейной регрессии в python. Доступно в Интернете: <https://realpython.com/linear-regression-in-python> (дата обращения: 13.03.2023).

### Информация об авторах

**Зайченко Елена Аркадьевна** – старший преподаватель Белорусско-Российского университета. E-mail: [helena.zai@mail.ru](mailto:helena.zai@mail.ru).

**Капелько Эдуард Александрович** – студент 3-го курса Белорусско-Российского университета. E-mail: [kapedalex@mail.ru](mailto:kapedalex@mail.ru)

**Зубков Евгений Александрович** – аспирант Белорусско-Российского университета. E-mail: [zekazub@gmail.com](mailto:zekazub@gmail.com).

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЛЕКАРСТВЕННЫХ ПРЕПАРАТОВ ПРОТИВ ХРОНИЧЕСКОГО МИЕЛОИДНОГО ЛЕЙКОЗА

А. Д. Карпенко<sup>1</sup>, Т. Д. Войтко<sup>2</sup>, К. В. Фурс<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Объединённый институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,  
Минск

<sup>2</sup>Белорусский Государственный Университет, Минск

**Аннотация.** При использовании методов глубокого обучения и компьютерного моделирования потенциальных лекарственных препаратов были идентифицированные новые низкомолекулярные соединения, перспективные для создания новых противоопухолевых препаратов, ингибирующих острые стадии развития миелоидного лейкоза. Были выполнены такие исследования как разработка архитектуры нейронной сети, формирование библиотеки потенциальных лигандов для обучения нейронной сети, молекулярный докинг и расчет свободной энергии связывания, генерация SMILES соединений, обучение нейронной сети, оценка результатов обучения и работы. Показано, что комбинированный подход с использованием нейронных сетей и компьютерного моделирования формирует продуктивную базу для генерации базовых структур.

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, машинное обучение, *in silico*, хронический миелоидный лейкоз

## APPLICATION OF COMPUTER MODELING METHODS FOR THE GENERATION OF POTENTIAL DRUGS AGAINST LEUKEMIA

A. D. Karpenko<sup>1</sup>, T. D. Voitko<sup>2</sup>, K. V. Furs<sup>1</sup>

<sup>1</sup>The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Science of Belarus,  
Minsk

<sup>2</sup>Belarussian State University, Minsk

<sup>3</sup>Institute of Bioorganic Chemistry of the National Academy of Science of Belarus, Minsk

**Abstract.** We used deep learning methods and computer modeling of potential drugs to identify new small-molecular compounds that are promising for the creation of new antitumor drugs that inhibit the acute stages of myeloid leukemia. Such studies were carried out as the development of the architecture of the neural network, the formation of a library of potential ligands for training the neural network, molecular docking and calculation of the free energy of binding, the generation of SMILES compounds, the training of the neural network, the evaluation of the results of training and work. The paper shows that a combined approach using neural networks and computer simulation forms a productive basis for generating basic structures.

**Key words:** computer modeling, machine learning, *in silico*, leukemia

Дизайн и разработка лекарств – это длительный и дорогостоящий процесс с большим количеством рисков. Непрерывные инновации в науке и технологиях, а также взрывной рост биомедицинских данных открывают беспрецедентные возможности для применения алгоритмов глубокого обучения в биомедицинских областях для ускорения и улучшения качества разработки лекарств. В этой работе мы рассмотрим используемые нами методы в дизайне лекарств против хронического миелоидного лейкоза на основе лигандов и структур. Исследования фундаментальных молекулярных механизмов, лежащих в основе передачи

сигналов опухолевых клеток, выявили решающую роль протеинкиназ в канцерогенезе, поскольку в тех случаях, когда эти ферменты чрезмерно экспрессированы или активны, они способствуют пролиферации клеток. За последние три десятилетия было установлено, что множественные злокачественные опухоли человека обусловлены модуляцией и дисфункцией протеиновых и липидных киназ и дезактивированных фосфатаз из-за перестановок хромосом и генетических мутаций. Исследования мутаций генома киназ показали, что генетически наследуемые варианты специфических киназ причинно связаны с возникновением, развитием, прогрессированием и рецидивом рака.

Все современные противоопухолевые агенты проявляют высокую токсичность, вызывая ряд побочных эффектов. Кроме того, в активных центрах киназ могут возникать мутации, предотвращающие связывание многих из этих препаратов, что вызывает резистентность и оставляет пациентов с ограниченными вариантами лечения. В связи с этим работы по созданию мультитаргетных противоопухолевых препаратов с приемлемыми фармацевтическими и токсикологическими свойствами актуальны и имеют большое научное и практическое значение.

Для конструирования мультитаргетных препаратов мы создали генеративную модель базирующуюся на архитектуре гетероэнкодере - автоэнкодере, предназначенного для решения задач, в которых входные данные представлены в нескольких разных форматах [1]. В качестве обучающей выборки были выбраны соединения из базы данных PubChem (<https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/>) содержащие 2-ариломиноперемедин и их энергия связывания после молекулярного докинга программой AutoDock Vina (<https://vina.scripps.edu/>) с BCR-ABL тирозинкиназой (PDB ID: 3OXZ; <https://www.rcsb.org/>).

В настоящей работе нами реализована архитектура модели гетероэнкодера с тремя энкодерами и двумя декодерами, которая использует открытую библиотеку Keras (<https://keras.io/>), обеспечивающую работу с искусственными нейронными сетями. В этой модели входные данные задаются в форматах SMILES (Simplified Molecular Input Line Entry System), канонический SMILES и вектора характеристик молекулы, где первые два формата являются строковыми, а третий является числовым вектором. Архитектура разработанной модели гетероэнкодера представлена на рис.1.

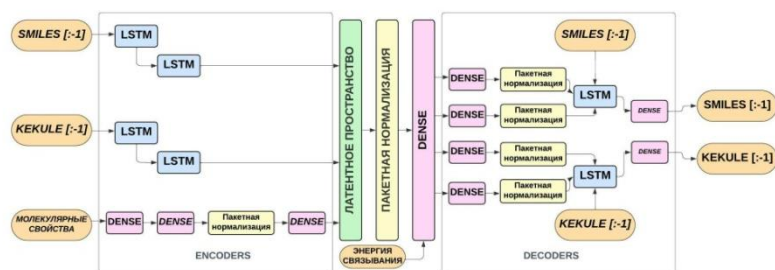


Рисунок 1 – Архитектура разработанной модели гетероэнкодера

Модель гетероэнкодера включала 784 537 параметров (весов), из которых 781 369 параметров использовали для ее обучения. В процессе обучения применяли дифференцируемую неотрицательную функцию ошибки - категориальную кросс-энтропию - и разработанную функцию штрафов CustomChemLoss(CCL), которая учитывала специфику входных данных. Эта функция налагала штрафы за отсутствие в декодированной молекуле 2-ариламинопиримидина и нарушения ее стереохимии. Таким образом итоговая функция ошибки есть взвешенная сумма разработанной функции штрафов и категориальной кросс-энтропии, рассчитанная по формуле:

$$\text{Loss function} = \text{CCE} + 0.1 * \text{CCL}, \quad (1)$$

где CCE - это Categorical Cross Entropy, CCL - это Custom Chemical Loss.

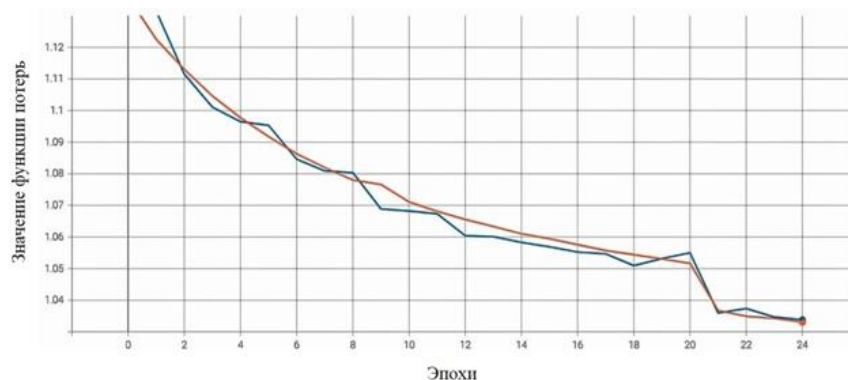


Рисунок 2 – Потери при обучении и валидации для разработанной модели гетероэнкодера

Анализ приведенных на рис. 2 данных свидетельствует о подобии графиков и их конечной сходимости, что позволяет сделать вывод об успешном обучении нейронной сети и отсутствии ее переобучения.

В результате работы гетероэнкодера были получены линейные представления SMILES для 1 117 молекул, которые очищали от дубликатов, проверяли на валидность, интерпретируемость и содержание 2-ариламинопиримидина с помощью модуля RDKit (<http://www.rdkit.org/>) и преобразовывали из представлений SMILES в химические структуры.

Полученная выборка сгенерированных соединений была проверена методом молекулярного докинга с рентгеновскими структурами Bcr-Abl тирозинкиназы (PDB ID: 3OXZ; <https://www.rcsb.org>) и ее мутантной формы Bcr-AblT315I (PDB ID: 3OY3; <https://www.rcsb.org>) в программе AutoDock Vina (<https://vina.scripps.edu>).

Полученная выборка соединений после их ранжирования по значениям оценочной функции в программе AutoDock Vina составила 569 молекул имеющих низкую энергия связывания от -9 ккал/моль до -13,8 ккал/моль. С учетом стандартной ошибки программы AutoDock Vina, составляющей 2,9 ккал/моль (<https://vina.scripps.edu>), эти значения сопоставимы с величинами, полученными с помощью идентичного вычислительного протокола для мощного противоопухолевого препарата понатиниба, широко применяемого в клинике для терапии ХМЛ.

### Библиографический список

1. Чумаков, А. А. Система SMILES-кодирования молекулярных структур и её применение для решения научно-исследовательских задач / А. А. Чумаков, Ю. Г. Слизов // Национальный исследовательский Томский государственный университет. – 2017. – С. 10.

### Информация об авторах

**Карпенко Анна Дмитриевна** – научный сотрудник Объединённого института проблем информатики Национальной академии наук Беларуси. E-mail: rfe.karpenko@gmail.com.

**Войтко Тимофей Дмитриевич** – студент 4-го курса Белорусского государственного университета. E-mail: timvaitko@gmail.com.

**Фурс Константин Викторович** – инженер-программист, Объединённый институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси. E-mail: kubujlo@gmail.com.

## ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ГИДРОЛОКАЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Е. О. Коваленко, И. В. Прохоров, А. А. Сущенко

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** В докладе рассмотрены вопросы улучшения качества гидролокационных изображений морского дна по данным измерений гидролокатора бокового обзора, оснащенного несколькими антеннами с различной шириной диаграммы направленности. В рамках кинетической модели, описывающей процесс импульсного зондирования в полупространстве с диффузными условиями отражения на границе, предложены экстраполяционные методы подавления размытости изображений коэффициента донного рассеяния.

**Ключевые слова:** коэффициент донного рассеяния, гидролокатор бокового обзора, экстраполяция

## EXTRAPOLATION IMPROVEMENT ALGORITHMS SONAR IMAGE QUALITY

E. O. Kovalenko, I. V. Prokhorov, A. A. Sushchenko  
Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok

**Abstract.** The report discusses the issues of improving the quality of sonar images of the seabed according to the measurements of a side-scan sonar equipped with several antennas with different beam widths. Within the framework of a kinetic model describing the process of pulsed sounding in a half-space with diffuse reflection conditions at the boundary, extrapolation methods are proposed for suppressing the blurring of images of the bottom scattering coefficient.

**Key words:** bottom scattering coefficient, side-scan sonar, extrapolation

В настоящее время существует множество методов обработки размытых изображений [1]. Причины размытости могут быть весьма разнообразны и вызваны, например, движением наблюдаемого объекта или наблюдателя, несовершенством приемопередающей аппаратуры или неправильной фокусировкой. Как правило, плохого качества изображения обрабатывается после того, как они получены целиком. Получаемые с помощью гидролокаторов бокового обзора акустические изображения формируются послойно в направлении движения подводного аппарата и, зачастую, приходится корректировать изображения в реальном режиме времени, чтобы изменить задачи выполняемой миссии и осуществить корректировку курса необитаемого подводного аппарата [2, 3]. В этом случае традиционные методы улучшения качества изображений не подходят и остро встает проблема разработки новых алгоритмов. Как правило, задачу фокусировки акустических изображений, получаемых с гидролокатора бокового обзора, решают путем синтеза апертуры [4]. Однако применимость данного метода ограничена невозможностью полностью обеспечить траекторную стабильность движения подводного аппарата на временном интервале синтеза апертуры.

В предыдущих работах авторов, посвященных вопросам математического моделирования процессов акустического зондирования морского дна автономными необитаемыми аппаратами, оснащенными гидролокаторами бокового обзора, проводился анализ влияния объемного учета рассеяния на качество гидролокационных изображений и разрабатывались алгоритмы одно- и многокурсного зондирования [5–7]. Исследования, касающиеся улучшения качества размытых изображений, вызванных применением



недостаточно узких в направлении движения подводного аппарата диаграмм направленности, затрагивались в меньшей степени.

В докладе обсуждаются экстраполяционные методы подавления размытости изображений коэффициента донного рассеяния, основанные на измерении отраженного сигнала несколькими антеннами с различной шириной диаграммы направленности. В случае двух и трех приемных антенн в рамках кинетической модели распространения звука в среде при достаточно малой ширине диаграммы направленности построены асимптотические экстраполяционные формулы, позволяющие получить существенное уточнение восстанавливаемого коэффициента донного рассеяния. Проведен численный анализ качества восстановления коэффициента донного рассеяния в зависимости от скорости изменения искомой функции в области восстановления, ошибок измерения и точности асимптотического разложения. Показано, что экстраполяционные методы улучшения качества весьма чувствительны к ошибкам измерений и резким изменениям коэффициента донного рассеяния.

### **Библиографический список**

1. Digital image processing / R. C. Gonzales, R. E. Woods. – Boston: MA Addison-Wesley, 2001.
2. Technology and Applications of Autonomous Underwater Vehicles / G. Griffiths. – London: CRC Press, 2002. – DOI: 10.1201/9780203522301.
3. Матвиенко, Ю. В. Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов / Ю. В. Матвиенко, В. А. Воронин, С. П. Тарасов, А. В. Скарня, Е. В. Тутынин // Подводные исследования и робототехника. – 2009. – Т. 8. – № 2. – С. 4–15.
4. Агеев, А. Л. Синтезирование апертуры многоканального гидролокатора бокового обзора с компенсацией траекторных нестабильностей / А. Л. Агеев, Г. А. Игумнов, В. Б. Костоусов, И. Б. Агафонов, В. В. Золотарев, Е. А. Мадисон // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2013. – № 3. – С. 140–148.
5. Прохоров, И. В. Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения / И. В. Прохоров, А. А. Сущенко // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61. – № 3. – С. 400–408. – DOI: S0320791915020100.
6. Коваленко, Е. О. Определение коэффициента донного рассеяния при многолучевом зондировании океана / Е. О. Коваленко, И. В. Прохоров // Дальневосточный математический журнал. – 2019. – Т. 19. – № 2. – С. 206–222.
7. Коваленко, Е. О. Локализация линий разрыва коэффициента донного рассеяния по данным акустического зондирования / Е. О. Коваленко, И. В. Прохоров // Сибирский журнал промышленной математики. – 2022. – Т. 25. – № 1. – С. 67–79. – DOI: SIBJIM.2022.25.105.

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00378.

### **Информация об авторах**

**Коваленко Евгений Олегович** – младший научный сотрудник ИПМ ДВО РАН.  
E-mail: kovalenko.eo@dvfu.ru.

**Прохоров Игорь Васильевич** – д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН. E-mail: prokhorov@iam.dvo.ru.

**Сущенко Андрей Андреевич** – младший научный сотрудник ИПМ ДВО РАН.  
E-mail: sushchenko.aa@dvfu.ru.

## ИНДИВИДУАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД В МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ДРЕВЕСНЫХ СООБЩЕСТВ

А. Н. Колобов, Е. Я. Фрисман

*Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан*

**Аннотация.** В данной работе приводятся результаты построения имитационной компьютерной модели динамики древесных сообществ. В основе построения модели находится индивидуально-ориентированный подход, согласно которому моделирование динамики древостоя складывается из описания роста каждого дерева с учетом его видовых характеристик и локально доступных ресурсов. Показаны результаты применения модели для разработки оптимальных сценариев лесопользования.

**Ключевые слова:** Имитационная модель, индивидуально-ориентированный подход, модель роста дерева, древостой, сценарии лесопользования

## INDIVIDUAL-BASED APPROACH TO MODELING THE DYNAMICS OF FOREST STANDS

A. N. Kolobov, E. Ya. Frisman

*Institute for Complex Analysis of Regional Problems FEB RAS, Birobidzhan*

**Abstract.** This paper presents the results of building a simulation model of the dynamics of forest stands. The model building is based on an individually-based approach, according to which the modeling of forest stand dynamics consists of a description of the growth of each tree, taking into account its species characteristics and locally available resources. The results of applying the model to develop optimal forest management scenarios are shown.

**Key words:** simulation model, individual-based approach, tree growth model, forest stand, forest management scenarios

Продолжительность роста дерева и древостоя в целом измеряется десятками и сотнями лет, что вызывает трудности при изучении естественной динамики древесных сообществ, а также реакций лесных насаждений на управляющие воздействия (рубки, лесопосадки) с помощью прямых измерений и наблюдений. Для решения этой проблемы применяют математические и компьютерные модели, которые позволяют произвести детальное описание и исследование структуры и функционирования лесных экосистем под воздействием внешних и внутренних факторов развития.

В данной работе приводятся результаты построения имитационной компьютерной модели динамики древесных сообществ и ее верификации на основе эмпирических данных. Показаны результаты применения модели для разработки оптимальных сценариев лесопользования.

В основе построения модели находится индивидуально-ориентированный подход, согласно которому моделируется рост каждого дерева на участке, учитывая их видовые характеристики и локально доступные ресурсы, что в совокупности определяют динамику древостоя [1]. Моделируемый участок делится на ячейки размером 20×20 см, в каждой из которых одновременно может находиться только одно дерево. Расположенные таким образом деревья конкурируют между собой за световые ресурсы, что определяет процессы их роста и отмирания. Использование пронумерованных ячеек с заданными пространственными координатами

тами упрощает алгоритмы рассеивания семян, поиска ближайших соседей при расчете светового режима и хранения информации.

Имитационная модель позволяет проводить вычислительные эксперименты со всевозможными комбинациями видовой и возрастной структуры древостоев. Модель направлена на построение прогнозных сценариев развития смешанных древесных сообществ, как при отсутствии внешних нарушений, так и при наличии различного рода воздействий (пожары, ветровалы, вспышки насекомых, рубки). Моделирование роста каждого дерева на участке позволяет легко имитировать различные схемы лесопосадок, а также сценарии выборочных рубок, определяя оптимальные стратегии лесопользования.

Модель представляет собой набор вычислительных алгоритмов, для реализации которых на ЭВМ написано соответствующее программное обеспечение на языке Delphi. На рис. 1 приведены вычислительные алгоритмы модели, записанные на языке блок-схем.



Рисунок 1 – Блок-схема имитационной модели динамики древесных сообществ

Значения параметров модели (блок 1) подбираются в зависимости от вида деревьев произрастающих в определенных природно-климатических условиях. Начальная пространственная структура древостоя, (блок 2) представляет собой комбинацию деревьев разного вида и возраста, расположенных на координатной сетке. Прогнозный период моделирования не ограничен, предполагая, что природно-климатические и почвенные условия не меняются с течением времени. На каждом шаге моделирования, который равен одному году, рассчитывается прирост объема, диаметра и высоты ствола дерева в зависимости от степени затенения соседними деревьями (блок 9). Отмирания дерева происходит в результате конкуренции за свет и предельного возраста, а также влияния различных экзогенных факторов, таких как ветровалы, поедания подроста копытными, фитофаги, пожары, рубки (блоки 10, 12). На каждом шаге моделирования осуществляется процедура рассеивания семян (блок 11). Вероятность прорастания семени того или иного вида в каждой свободной ячейке определяется количеством плодоносящих деревьев данного вида, а также расстоянием от них до рассматриваемой точки. При этом учитывается влияние неблагоприятных внешних факторов (высокая трава, грызуны т.д.) и условий освещенности в ячейке на образование подростка.

В качестве результатов моделирования исследователь получает различные статистические данные: запас, численность, пространственное распределение, возрастная структура, видовой состав древостоя, которые могут быть представлены в виде графиков, таблиц, диаграмм для каждого момента времени.

Настройку параметров модели осуществляли на основе данных таблиц хода роста [2]. Для верификации модели использовали эмпирические данные постоянных пробных площадей. Результаты моделирования динамики смешанных древесных сообществ показали, что модель хорошо отражает наблюдаемую в природе сукцессию, когда березовый древостой сменяется коренными темнохвойными видами, что говорит об адекватности построенной модели.

На основе имитационного моделирования проведен сравнительный анализ продуктивности еловых насаждений при разных схемах посадки [3]. Необходимо было определить оптимальные схемы посадки, которые обеспечивают получение максимального запаса древесины возраста технической спелости. Показано, что при отсутствии воздействия внешних факторов, шахматная схема посадки является оптимальной по сравнению с прямоугольной для получения максимального запаса древесины (рис. 2).

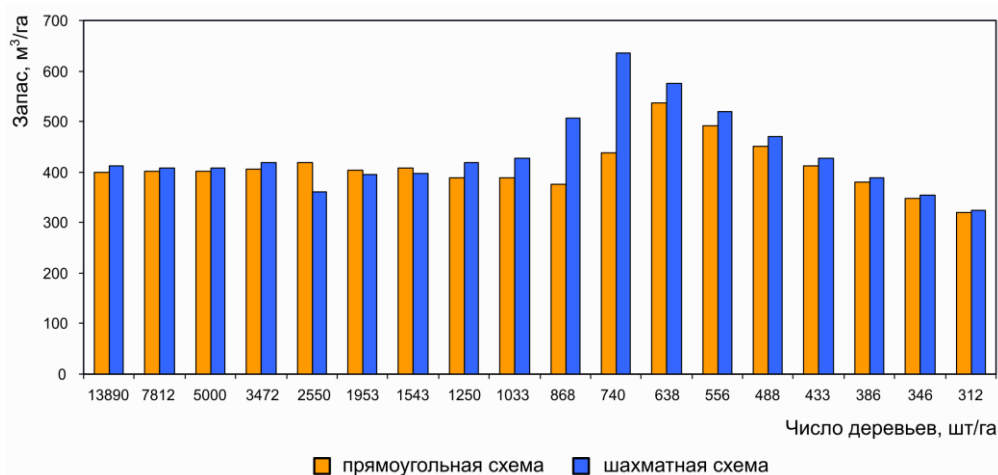


Рисунок 2 – Запас древесины елового насаждения в зависимости от начальной плотности древостоя и схемы посадки без учета влияния внешних факторов

### Библиографический список

1. Kolobov, A. N. Individual-based model of spatio-temporal dynamics of mixed forest stands / A. N. Kolobov, E. Ya. Frisman // *Ecological Complexity*. – 2016. – V. 27. – P. 29–39. – DOI: 10.1016/j.ecocom.2015.10.002.
2. Общесоюзные нормативы для таксации лесов / В. В. Загребов, В. И. Сухих, А. З. Швиденко, Н. Н. Гусев, А. Г. Мошкалева. – М.: Колос, 1992. – 195 с.
3. Колобов, А. Н. Модельный анализ продуктивности искусственных еловых насаждений при разных схемах посадки / А. Н. Колобов, Е. Я. Фрисман // *Журнал общей биологии*. – 2020. – Т. 81. – № 3. – С. 1–11. – DOI: 10.31857/S0044459620030045.

### Информация об авторах

**Колобов Алексей Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с. Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. E-mail: alex\_0201@mail.ru.

**Фрисман Ефим Яковлевич** – д-р биол. наук, проф., член-корр., научный руководитель Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. E-mail: Frisman@mail.ru.

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В СЛУЧАЕ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

К. С. Кузнецов, Е. В. Амосова

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** В работе рассматривается численное решение системы одномерных уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой среды. Для численного решения системы используется подход, использующий нейросетевое моделирование. Получено решение рассматриваемой системы. Благодаря универсальной метрике, метод дает возможность оценить точность полученного решения. Показаны преимущества и недостатки предлагаемого метода при решении уравнений Навье-Стокса в одномерном нестационарном случае для сжимаемой среды.

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, численное моделирование, нейронные сети, сжимаемая среда

## USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGY FOR NUMERICAL SIMULATION OF ONE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR COMPRESSIBLE MEDIA

K. S. Kuznetsov, E. V. Amosova

*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok  
Far Eastern Federal University, Vladivostok*

**Abstract.** The numerical solution of the one-dimensional Navier-Stokes equations system in the case of a compressible medium is considered. For the numerical solution of the system, an approach using neural network modeling is used. The solution of the considered system is obtained. Thanks to the universal metric, the method makes it possible to evaluate the accuracy of the obtained solution. The advantages and disadvantages of the proposed method for solving the Navier-Stokes equations in the one-dimensional non-stationary case for a compressible medium are shown.

**Key words:** Navier-Stokes equations, neural networks, compressible media, numerical simulation

Актуальность решения уравнений Навье-Стокса обусловлена их применением при математическом моделировании многих явлений и процессов. Решение систем Навье-Стокса для газовой динамики вызывают особый интерес в силу сложности моделируемых процессов.

Математическая модель одномерного нестационарного движения политропного вязкого теплопроводного совершенного газа описывается системой уравнений [1]:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (R\rho\theta),$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0,$$

$$c_v \rho \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - R \rho \theta \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь  $u, \rho, \theta$  – скорость, плотность и температура газа,  $\mu = const > 0$ ,  $c_v$  – вязкость газа, коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газа при постоянном объеме соответственно,  $R$  – газовая постоянная,  $k(\theta)$  – коэффициент теплопроводности.

При движении газа через интервал  $\Omega_0 = \{x: 0 < x < L\}$ , ограниченный с двух сторон при  $t > 0$ , система удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0(x), \quad u|_{x=0} = u_1(t), \quad u|_{x=1} = u_2(t), \\ \rho|_{t=0} &= \rho_0(x), \quad \rho|_{x=0} = \rho_1(t), \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0(x), \quad \theta|_{x=0} = \theta_1(t), \quad \theta|_{x=1} = \theta_2(t), \quad x \in \Omega_0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2)$$

Для решения задачи предлагается подход, основанный на нейросетевом численном моделировании уравнений [2]. Подход заключается в использовании нейронной сети в качестве аппроксиматора решения системы уравнений, учитывающего физику моделируемого процесса. Численное дифференцирование при помощи метода обратного распространения ошибки во время обучения нейронных сетей позволяет получить приближенное решение решаемой задачи, а выбранная функция потерь, отвечающая невязке уравнений в сильной форме и соответствию приближенного решения начальным и граничным условиям позволяет качественно оценить его точность:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{X}, \bar{T}) &= \sqrt{\frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} (r_1^2(x_i, t_i) + r_2^2(x_i, t_i) + r_3^2(x_i, t_i))} + \sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (u_p(x_i, t_i) - u_b(x_i, t_i))^2} + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (\theta_p(x_i, t_i) - \theta_b(x_i, t_i))^2} + \sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (\rho_p(x_i, t_i) - \rho_b(x_i, t_i))^2}, \end{aligned}$$

где  $\varphi(\bar{X}, \bar{T})$  – функция потерь,  $N_r$  – общее число точек, лежащих в пределах  $x \in \Omega_0$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $r_1, r_2, r_3$  – невязки уравнений системы (1),  $N_b$  – общее число точек, соответствующее начальным и граничным условиям,  $\bar{X}$  – набор точек  $\in \Omega_0$ ,  $\bar{T}$  – набор точек  $\in [0, T]$ ,  $u_p, \theta_p, \rho_p$  – приближенное решение системы (1), полученное нейронной сетью,  $u_b, \theta_b, \rho_b$  – функции, соответствующие начальным и граничным условиям (2).

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению функций путём обучения нейронных сетей на минимизацию функционала:

$$\varphi(\bar{X}, \bar{T}) \rightarrow \min.$$

На рис. 1. представлено решение задачи (1) – (2), полученное в результате нейросетевого моделирования. Решение представлено в безразмерном виде.

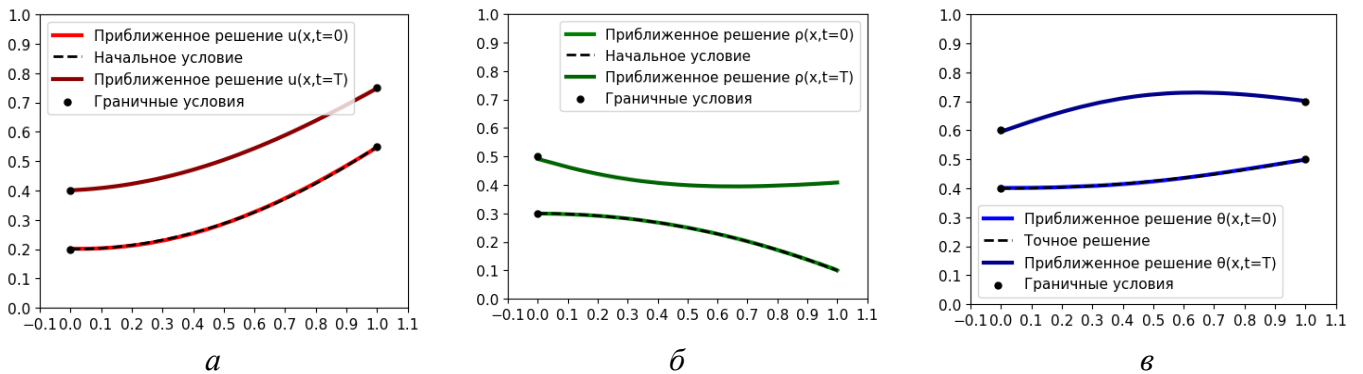


Рисунок 1 – Графики сравнения приближенного и точного решения функций  $u$  (а),  $\theta$  (б),  $\rho$  (в) в начальный и конечный моменты времени

Из рис. 1. видно, что решение системы уравнений удовлетворяет начальным и граничным условиям. Качественно оценить точность решения можно при помощи нормы в  $L_2$  относительно невязки уравнений, а также начальных и граничных условий:

$$\sqrt{\frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} (r_1^2(x_i, t_i) + r_2^2(x_i, t_i) + r_3^2(x_i, t_i))} = 0.25, \quad \sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (u_p(x_i, t_i) - u_b(x_i, t_i))^2} = 2.5 \cdot 10^{-3},$$

$$\sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (\rho_p(x_i, t_i) - \rho_b(x_i, t_i))^2} = 8.0 \cdot 10^{-3}, \quad \sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (\theta_p(x_i, t_i) - \theta_b(x_i, t_i))^2} = 6.4 \cdot 10^{-3}.$$

Преимуществами предлагаемого метода являются простота реализации, эффективность реализуемого алгоритма, а также перспектива применения при решении задач в пространстве большей размерности [3].

### Библиографический список

1. Амосова, Е. В. Оптимальное управление течением вязкого теплопроводного газа / Е. В. Амосова // Сиб. журн. индустр. матем. – 2007. – Т. 18. – № 2. – С. 5–22. – DOI: 10.1134/S1990478909010025.
2. Raissi, M., Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations/ M. Raissi, P. Perdikaris, G. Karniadakis // Journal of Computational Physics. – 2019. – V.378. – P. 686–707. – DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
3. Zhang, D. Quantifying total uncertainty in physics-informed neural networks for solving forward and inverse stochastic problems / D. Zhang, L. Lua, L. Guob, G. Karniadakis // Journal of Computational Physics. – 2019. – V. 397. – DOI:10.1016/j.jcp.2019.07.048.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00) и при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2023-946).

### Информация об авторах

**Кузнецов Кирилл Сергеевич** – ассистент департамента математического и компьютерного моделирования Института математических и компьютерных технологий ДВФУ, аспирант Института математических и компьютерных технологий ДВФУ, инженер-исследователь Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: kuznetsovks17@gmail.com.

**Амосова Елена Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор департамента математического и компьютерного моделирования Института математических и компьютерных технологий ДВФУ, н.с. Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: el\_amosova@mail.ru.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФАКТОРОВ ВЛИЯНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОРГАНИЗАЦИЙ ИННОВАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

С. С. Кузора

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** Работа посвящена использованию методов математического моделирования для исследования факторов влияния, оказывающих воздействие на эффективность организаций. В качестве эконометрического метода применяются временные ряды для анализа статистических показателей. После определения числовых значений показателей используется математический аппарат дифференциальных уравнений с целью изучения динамики факторов влияния.

**Ключевые слова:** математическое моделирование социально-экономических процессов, эффективность организаций, инновационная инфраструктура, факторы влияния

## STUDY OF THE DYNAMICS OF THE FACTORS OF INFLUENCE ON THE EFFECTIVENESS OF ORGANIZATIONS OF INNOVATION INFRASTRUCTURE

S. S. Kuzora

Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Abstract.** The work is devoted to the use of methods of mathematical modeling to study the influence factors that have an impact on the effectiveness of organizations. As an econometric method, time series are used to analyze statistical indicators. After determination of numerical values of indicators the mathematical apparatus of differential equations is used with the purpose of studying dynamics of influence factors.

**Key words:** mathematical modeling of socio-economic processes, efficiency of organizations, innovation infrastructure, factors of influence

Предлагается метод исследования динамики факторов влияния на эффективность организаций, деятельность которых связана с технологическим развитием [1–3]. Одним из возможных факторов влияния является социально-экономическое положение России, основанное на таких показателях как: оборот организаций по видам экономической деятельности, реальная начисленная заработная плата работников, среднегодовая численность занятых.

Для определения значения фактора влияния анализируется информация по упомянутым показателям из Федеральной службы государственной статистики. Анализ проводится посредством математического аппарата временных рядов, где одной из основных статистических характеристик является среднее значение: [4]

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad (1)$$

где  $\Sigma$  – сумма числовых значений,  $n$  – количество переменных.

Далее полученное значение используется для нахождения разницы числовых характеристик в определенный период времени среди вышеупомянутых социально-экономических показателей:

$$k_i = \frac{x_j}{\bar{y}}, \quad (2)$$

где  $x_j$  – значение социального-экономического показателя в конкретное время.



Найденные значения  $k_i$  для каждого показателя (оборот организаций по видам экономической деятельности, реальная начисленная заработная плата работников, среднегодовая численность занятых) позволяют найти интегральное значение социально-экономического положения:

$$l_i = \frac{k_{1i} + k_{2i} + k_{3i}}{n}, \quad (3)$$

где  $l_i$  соответствует определенному социально-экономическому показателю,  $n$  – кол-во показателей.

Результаты расчетов отображаются в виде табл. 1 и рис. 1.

Результатом решения уравнения является график, представленный в виде рис. 2.

Таблица 1 – Интегральные значения социально-экономических показателей

$i$	Год	Первый показатель $k_{1i}$	Второй показатель $k_{2i}$	Третий показатель $k_{3i}$	Интегральные значения $l_i$
1	2011	1,2	0,99	1	1,06
2	2012	0,88	1,05	1	0,97
3	2013	0,96	1,01	1	0,99
4	2014	1,21	0,98	1	1,06
5	2015	1,08	0,88	1	0,98
6	2016	1,12	0,97	1	1,03
7	2017	1,16	0,99	1	1,05
8	2018	1,35	1,05	0,99	1,13
9	2019	1,19	1,01	0,98	1,06
10	2020	0,56	1,03	0,98	0,85

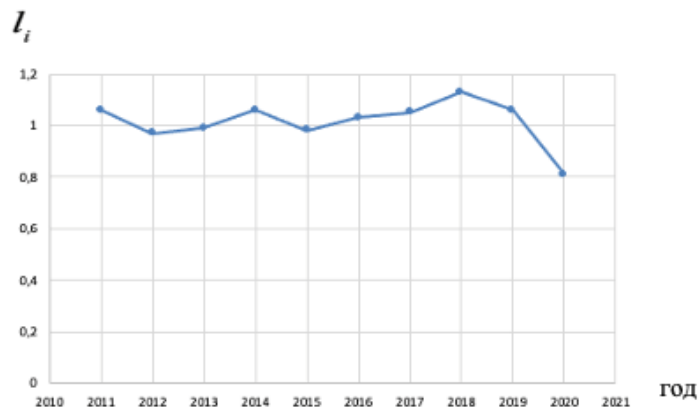


Рисунок 1 – График изменения социально-экономических показателей

Одним из возможных способов изучения динамики факторов влияния является решение дифференциальных уравнений. В качестве частного примера составляется и решается дифференциальное уравнение первого порядка с учетом полученного значения интегрального показателя фактора влияния:

$$\begin{aligned}
 y' &= -0.2 \\
 \frac{dy}{dx} &= -0.2 \\
 dy &= -0.2dx \\
 \int dy &= \int (-0.2)dx \\
 y &= -0.2x + C
 \end{aligned}$$

где значение -0,2 – значение фактора влияния.

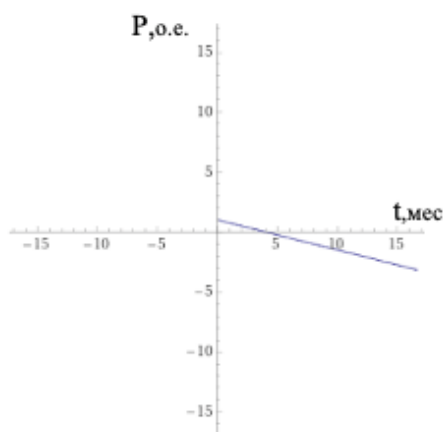


Рисунок 2 – Динамика социально-экономического положения

Прямая графика имеет нисходящий тренд, что указывает на отрицательное воздействие фактора влияния (социально-экономическое положение) на эффективность организаций инновационной инфраструктуры.

### Библиографический список

1. Соловьев, Д. Б. Использование алгоритмов нечеткого вывода для предварительной оценки участников при кластерном подходе / Д. Б. Соловьев, С. С. Кузора, А. Е. Меркушева // Инновации. – 2018. – № 5(235). – С. 77–81.
2. Соловьев, Д. Б. Методика оценки инновационной деятельности посредством гибких алгоритмов / Д. Б. Соловьев, С. С. Кузора // Инновации. – 2019. – № 6(248). – С. 78–87. – DOI: 10.26310/2071-3010.2019.248.6.012.
3. Соловьев, Д. Б. Нечеткое моделирование оценки элемента кластера / Д. Б. Соловьев, С. С. Кузора // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. – 2019. – № 2(54). – С. 23–28.
4. Кузора, С. С. Динамика изменения качества деятельности организаций инновационной инфраструктуры / С. С. Кузора // Пром-Инжиниринг: труды VII всероссийской научно-технической конференции, Москва, Челябинск, Новочеркасск, Волгоград, Сочи, 17–21 мая 2021 года. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2021. – С. 248–253.

### Информация об авторах

**Кузора Станислав Сергеевич** – ассистент Департамента инноваций Политехнического института Дальневосточного федерального университета. E-mail: kuzora\_ss@dvfu.ru.

## ГЕНЕТИЧЕСКАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ МИГРАЦИОННО СВЯЗАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ С НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ПОКОЛЕНИЯМИ И ПЛОТНОСТНО ЗАВИСИМОМ ЛИМИТИРОВАНИИ ГАМЕТОПРОДУКЦИИ

М. П. Кулаков, Е. Я. Фрисман

*Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан*

**Аннотация.** Изучаются механизмы возникновения генетической дивергенции (устойчивых различий между миграционно связанными популяциями), описываемых системой связанных отображений. Показано, что при движении к одной из возможных предельных генетических структур происходит изменение репродуктивных возможностей популяций. В результате, генетическая дивергенция достигается как часть переходного процесса при движении к мономорфизму, либо она оказывается устойчивой и на разных участках формируется полиморфизм.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, популяция, миграция, генетическая дивергенция, бифуркации, квадростабильность

## GENETIC DIVERGENCE IN THE SYSTEM OF TWO POPULATIONS COUPLED BY MIGRATION WITH NON-OVERLAPPING GENERATIONS AND DENSITY-DEPENDENT LIMITATION OF GAMETE PRODUCTION

M. P. Kulakov, E. Ya. Frisman

The Institute for Complex Analysis of Regional Problems FEB RAS, Birobidzhan

**Abstract.** We are studying the mechanisms of occurrence of genetic divergence, i.e. stable genetic differences between populations coupled by migration, described by the system of coupled maps. We show that when the populations evolve to one of the possible genetic structures, the reproductive capabilities change. As a result, genetic divergence appears as part of the transition process when moving towards monomorphism, or it is stable and polymorphism occurs in different sites.

**Key words:** mathematical modeling, population, migration, genetic divergence, bifurcations, quad-stability

Задача изучения эволюции и микроэволюции биологических популяций, связанная с поиском механизмов видообразования, имеет давнюю и богатую историю. Ее сложность вызвана следующими обстоятельствами. Под действием отбора происходит закрепление такого признака (генотипа), который обеспечивает наибольшую приспособленность особей и, как следствие, наибольшую скорость воспроизводства. В результате в изолированных популяциях этот признак и определяющий его генотип фиксируется, и популяция оказывается генетически однородной. Однако наличие географической изолированности между несколькими первоначально сходными субпопуляциями может приводить к тому, что на смежных участках направления отбора будут различными из-за небольших отличий в условиях среды. Как следствие небольшие отклонения начальных условий смогут привести к возникновению и сохранению существенных филогенетических различий на смежных участках в течение длительных периодов времени. В результате популяция на всем ареале окажется генетически неоднородной и полиморфной по данному признаку [1].

В данной работе методами математического моделирования и анализа бифуркаций изучаются базовые механизмы, приводящие к генетической дивергенции.

Изучается система двух миграционно связанных панмиктических популяций с непересекающимися поколениями, в которой действуют менделеевские правила наследования, и существует следующая элементарная последовательность популяционных процессов: формирование зигот из гамет, отбор зигот, миграция зигот (взрослых особей) между субпопуляциями, производство новых гамет и т.д. Считается, что приспособленность особей зависит от ее генотипа. К отбору, осуществляемому на стадии зигот, чувствителен единственный диаллельный локус, представленный аллеломорфами  $A$  и  $a$  [1].

Процесс образования гамет на первом и втором локальном участке характеризуется коэффициентами гаметопродукции:  $g_{ij} \geq 0$  и  $h_{ij} \geq 0$  (индекс  $ij$  соответствуют комбинации аллелей  $A$  и  $a$ ). Для упрощения модельных уравнений считается, что  $g_{ij} = g_1$  и  $h_{ij} = g_2$ , т.е. гаметопродукция не зависит от генотипов производящих их особей. Без нарушения общности, такая агрегация параметров позволяет количественно описать направление отбора, на каждом локальном участке, используя коэффициенты  $0 \leq W_{ij} \leq 1$  и  $0 \leq V_{ij} \leq 1$ , равные приспособленностям зигот с генотипами  $AA$ ,  $Aa$  и  $aa$ . Предполагается, что небольшая часть взрослых особей, независимо от своего генотипа, регулярно перемещается (мигрирует) на соседний участок. Доля эмигрантов от общей численности  $N_1$  и  $N_2$  равна  $0 \leq m \leq 1$ , которая принимается равной для каждой субпопуляции и генотипа.

Среди возможных направлений отбора можно исключить движущий отбор, который способен привести только к генетически однородной популяции, состоящей только из гомозигот ( $W_{AA} > W_{Aa} \geq W_{aa}$  или  $W_{aa} > W_{Aa} \geq W_{AA}$ ), или только гетерозигот с одинаковой концентрацией аллелей ( $W_{Aa} > W_{AA} \geq W_{aa}$  или  $W_{Aa} > W_{aa} \geq W_{AA}$ ) на обоих участках. Напротив, дизруптивный (разрывающий) отбор ( $W_{Aa} < W_{AA}$  и  $W_{Aa} < W_{aa}$ ) даже в локальном случае способен приводить к появлению промежуточных генетических состояний полиморфной популяции с преобладанием аллеля  $A$  или  $a$ . Поэтому ограничимся последним случаем, положив:

$$W_{AA} = W_{aa} = V_{AA} = V_{aa} = 1 \text{ и } W_{Aa} = 1 - s_1, V_{Aa} = 1 - s_2,$$

где  $0 \leq s_i \leq 1$  – интенсивность отбора гетерозигот ( $i = 1, 2$ ).

Обозначим через  $q_1$  и  $q_2$  доли (концентрации) гамет несущих аллель  $A$  к общему числу гамет на первом и втором участке соответственно. С учетом приведенных допущений, динамика генетической структуры и численности двух миграционно связанных популяций в случае дизруптивного отбора описывается следующей системой связанных отображений:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \frac{1}{G_1(t)} \left( (1-m)q_1(t)(1-s_1(1-q_1(t))) + m \frac{N_2(t)}{N_1(t)} q_2(t)(1-s_2(1-q_2(t))) \right), \\ q_2(t+1) = \frac{1}{G_2(t)} \left( (1-m)q_2(t)(1-s_2(1-q_2(t))) + m \frac{N_1(t)}{N_2(t)} q_1(t)(1-s_1(1-q_1(t))) \right), \\ N_1(t+1) = (1-m)g_1\bar{w}_1(t)N_1(t)F(N_1(t)) + mg_2\bar{w}_2(t)N_2(t)F(N_2(t)), \\ N_2(t+1) = (1-m)g_2\bar{w}_2(t)N_2(t)F(N_2(t)) + mg_1\bar{w}_1(t)N_1(t)F(N_1(t)), \end{cases} \quad (1)$$

где  $t = 1, 2, 3, \dots$  – номер сезон размножения;  $\bar{w}_1(t) = 1 - 2s_1q_1(t)(1-q_1(t))$  и  $\bar{w}_2(t) = 1 - 2s_2q_2(t)(1-q_2(t))$  – обобщенная приспособленность первой и второй популяции до процесса миграции;  $G_1 = (1-m)\bar{w}_1 + m\bar{w}_2N_2/N_1$  и  $G_2 = (1-m)\bar{w}_2 + m\bar{w}_1N_1/N_2$  – обобщенная приспособленность после миграции, которая показывает, во сколько раз увеличилось (уменьшилось) число особей за одно поколение [2].

В системе (1) присутствует функция  $F$ , которая описывает действие плотностно зависимо лимитирования процесса гаметопродукции. Традиционно действие лимитирования описывают убывающими функциями  $F(N)$ , для которых верно:  $F(0) = 1$  и  $dF(N)/dN < 0$ . Например,  $F(N_i) = 1 - N_i/K_i$  или  $F(N_i) = \exp(-N_i/K_i)$ .

Несложно заметить, что число новорожденных особей в каждой субпопуляции до отбора будет равно  $g_i N_i F(N_i)$ . После отбора и до миграции, численность уменьшится и составит:  $g\bar{w}_i(q_1, q_2) N_i F(N_i)$  ( $i = 1, 2$ ). В результате в каждый сезон субпопуляции имеют различные репродуктивные потенциалы, которые изменяются по мере движения к одному из вариантов предельной генетической структуры: однородной с одинаковой концентрацией гомологичных аллелей ( $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$ ) или неоднородной с разной концентрацией аллелей ( $\bar{q}_1 \neq \bar{q}_2$ ). Как следствие, предельные численности обеих субпопуляций для однородной и неоднородной структуры могут значительно отличаться ( $\bar{N}_1 \neq \bar{N}_2$ ), а потеря устойчивости соответствующих состояний равновесия (неподвижных точек) происходит при разных значениях параметров [2].

Исследование модели показывает, что для убывающих функций  $F$  система (1) имеет от 3 до 9 неподвижных точек с неотрицательными координатами, которые соответствуют различным предельным генетическим структурам. Три неподвижные точки существуют всегда и соответствуют однородной генетической структуре в обеих популяциях, для которой  $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0$ , 1 или  $1/2$ . Остальные шесть появляются в результате последовательности субкритического удвоения периода точки  $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 1/2$ , последующей седло-узловой бифуркации и суперкритического удвоения периода при снижении коэффициента миграции  $m$  или росте интенсивности отбора  $s_{ij}$ . В начале рождается пара седловых точек, соответствующих генетической дивергенции, с промежуточными значениями концентрациями аллелей  $0 < \bar{q}_1 < \bar{q}_2 < 1$  или  $0 < \bar{q}_2 < \bar{q}_1 < 1$  (много особей с аллелем  $A$  и мало с  $a$ , или на оборот). Однако это состояние проявляется в динамике лишь как часть переходного процесса при движении к одному из мономорфных состояний ( $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0$  или 1). Затем появляются дополнительные неподвижные точки, и это состояние становится устойчивым. При небольших значениях коэффициента миграции и большой интенсивности отбора гетерозигот популяции оказываются полиморфными, а динамика становится квадростабильной. В результате, в зависимости от начальных условий популяции оказывается однородными по генетической структуре, либо между ними сохраняются существенные различия, как по численностям, так и концентрациям аллелей [2].

### Библиографический список

1. Кулаков, М. П. Простая и сложная динамика в модели эволюции двух миграционно связанных популяций с непересекающимися поколениями / М. П. Кулаков, Е. Я. Фрисман // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2022. – Т. 30. – № 2. – С. 208–232. – DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-208-232.
2. Кулаков, М. П. Генетическая дивергенция в системе смежных популяций при плотностно-зависимом лимитировании гаметопродукции / М. П. Кулаков, Е. Я. Фрисман // Региональные проблемы. – 2023. – Т. 26. – № 1. – С. 12–27. – DOI: 10.31433/2618-9593-2023-26-1-12-27.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.

### Информация об авторах

**Кулаков Матвей Павлович** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с. Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. E-mail: k\_matvey@mail.ru.

**Фрисман Ефим Яковлевич** – д-р биол. наук, проф., чл.-корр. РАН, научный руководитель Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. E-mail: frisman@mail.ru.

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИСКУССТВЕННОГО СПИНОВОГО ЛЬДА НА РЕШЁТКЕ АПАМЕЯ

Э. А. Лобанова, П. А. Овчинников, И. В. Трефилов, В. С. Стронгин, Ю. А. Шевченко

*Департамент Теоретической Физики и Интеллектуальных Технологий ИНТ и ИАПМ ДВФУ, Владивосток*

*Институт Прикладной Математики ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** Были получены температурные зависимости термодинамически усреднённой энергии и теплоёмкости на спин для магнитного дипольного спинового льда на двумерной решётке Апамея. Методами полного перебора и Метрополиса в режиме температурного отжига определено одно из возможных основных состояний решётки. Использовалась модель точечных Изинг-подобных диполей с учётом дальнего взаимодействия в среднем 100 ближайших соседей. Проведено сравнение периодических и свободных граничных условий.

**Ключевые слова:** искусственный дипольный спиновый лёд, теплоёмкость, полный перебор, метрополис, энергия

## TEMPERATURE DEPENDENCES OF THE THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS OF ARTIFICIAL SPIN ICE ON THE APAMEA LATTICE

E. A. Lobanova, P. A. Ovchinnikov, I. V. Trefilov, V. S. Strongin, Y. A. Shevchenko

*Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University, Vladivostok*

*Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Science, Vladivostok*

**Abstract.** We obtained temperature dependencies both of thermodynamically averaged energy and heat capacity per spin of magnetic dipolar spin ice on a 2D Apamea lattice, comparing periodic and free boundary conditions. We determined one of the possible ground state configuration by using the Metropolis algorithm in temperature annealing mode and complete enumeration method. We use the model of point Ising-like dipoles considering long range interaction with average 100 nearest neighbours.

**Key words:** artificial dipolar spin ice, heat capacity, complete enumeration, metropolis, energy

Искусственный спиновый лёд – это группа метаматериалов, состоящих из магнитных наноостровков, расположенных таким образом, чтобы результирующая структура проявляла коллективные антиферромагнитные свойства. В рамках дипольной модели островки могут быть представлены как однодоменные наноразмерные антиферромагнетики, взаимодействующие посредством диполь-дипольного взаимодействия. Вследствие анизотропии формы в статической модели векторы их магнитных моментов лежат на самой длинной оси их фигуры. Поэтому их можно представить в виде спинов Изинга, центры которых совпадают с точечными диполями, а длина – с продольными размерами островков. Объём наноостровков таков, что каждый спин может быть перемагничен магнитным полем соседей.

Название «спиновый лёд» стало следствием сходства решётки пирохлора с решёткой водяного льда [1-2]. Первой созданной экспериментально структурой, имитирующей магнитные свойства решётки пирохлора на плоскости, стал квадратный спиновый лёд [3].

Современные методы создания наноматериалов позволяют тонко настраивать геометрию решётки и форму островков, поэтому новые геометрии двумерного спинового льда могут не иметь аналогов среди существующих материалов. В данной работе рассматривается спиновый лёд на решётке Апамея, представляющей собой квадратную решётку, некоторые рёбра которой удалены. Точечные диполи расположены на рёбрах квадратной решётки, векторы магнитных моментов направлены вдоль ребра. На рис. 1 показано одно из возможных основных её состояний.

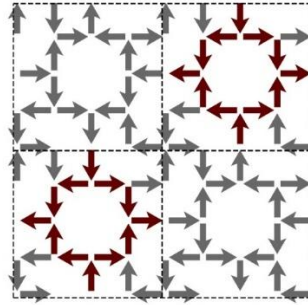


Рисунок 1 – Возможное основное состояние решётки Апамея. Модель Изинг-подобных диполей. Пунктирными линиями отделены друг от друга элементарные ячейки решётки. Красным обозначены диполи, направлением которых отличаются элементарные ячейки

Основным называется состояние с минимальной энергией. Геометрия решётки накладывает конфигурационные ограничения, вследствие чего не все парные взаимодействия могут быть одновременно удовлетворены. Это явление называется фрустрациями, оно используется в магнитной памяти и имеет место лишь в низкотемпературной фазе. Косвенным подтверждением наличия фазового перехода служит пик температурного поведения теплоёмкости, расходящийся для систем бесконечного размера. У некоторых решёток, таких как каирская, существует дополнительный фазовый переход в низкотемпературной области [5]. График на рис. 2 показывает, что у решётки Апамея так же есть такой переход. Теплоёмкость системы считается по формуле

$$C(T) = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{k_B T^2 N}. \quad (1)$$

Термодинамическое усреднение по распределению Гиббса, обозначенное как  $\langle \rangle$  было получено методом Метрополиса с учётом следующей формулы для энергии системы

$$E_s = \sum_{i,j(j>i)} E_{dip}^{ij} = D \sum_{i,j(j>i)} S_i S_j \left( \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} - 3 \frac{m_i m_j r_{ij}^2}{r_{ij}^5} \right), \quad (2)$$

где  $m_i$  – магнитный момент  $i$ -го спина единичной длины, направление которого принимает всего 2 возможных значения:  $s_i = \pm 1$ ,  $m_j$  и  $s_j$  для  $j$ -го спина определены аналогично.  $r$  – вектор, нормированный к единице для спинов, находящихся на расстоянии  $a$  друг от друга. Размерный коэффициент  $D$  взят из расчёта размера островка  $2.6 \times 360 \times 120$  нм, параметра решётки 500 нм и намагниченности насыщения материала 100 кА/м. Параметр решётки – это расстояние между центрами ближайших и лежащих вдоль одной оси островков.

В данной работе для расчёта термодинамических свойств использовалась решётка размером 6 на 6 элементарных ячеек, т.е. из 720. На рис. 1 элементарные ячейки отделены друг от друга пунктирными линиями. Использовалась модель точечных диполей без внешнего поля. Рассматривались дальнедействующие взаимодействия: учитывались пары частиц, удалённые друг от друга не более чем 1.25 элементарной ячейки, то есть в среднем 100 соседей для каждого спина. Для каждой температуры выполнено  $10^6$  шагов Метрополиса. На рис. 2 а и 2 б проведено сравнение периодических (РВС) и свободных

(FBC) граничных условий.

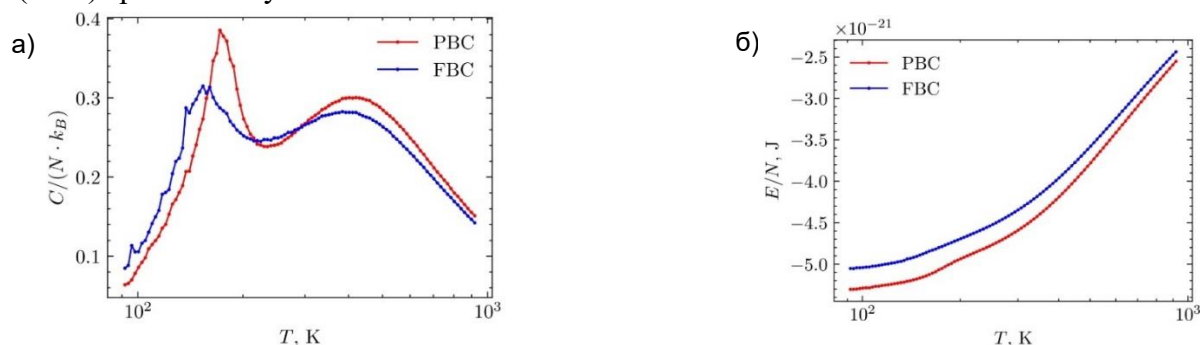


Рисунок 2 – Температурные зависимости решётки Апамея: а) теплоёмкость на спин как функция температуры; б) термодинамически усреднённая энергия на спин как функция температуры. 720 спинов. Дальнодействующая диполь-дипольная модель. Сравнение периодических (PBC) и свободных (FBC) граничных условий. Метрополис-вычисления

График 2 б показывает температурную зависимость математического ожидания энергии. Он был построен потому, что метастабильные конфигурации с энергией выше среднего значения при данной температуре имеют потенциал использоваться для передачи информации.

### Библиографический список

1. Anderson, P. W. Ordering and antiferromagnetism in ferrites / P. W. Anderson // Physical Review. – 1956. – V. 102. – № 4. – P. 1008.
2. Harris, M. J. Geometrical Frustration in the Ferromagnetic Pyrochlore  $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$  / M. J. Harris et al // Physical Review Letters. – 1997. – V. 79. – I. 13. – P. 2554–2557.
3. Wang, R. F. Artificial 'spin ice' in a geometrically frustrated lattice of nanoscale ferromagnetic islands / R. F. Wang, C. Nisoli, F. S. Freitas, J. Li, W. McConville, B. J. Cooley, M. S. Lund et al // Nature. – 2006. – V. 439(7074). – P. 303–6. – DOI: 10.1038/nature04447.
4. Приближенные методы математической физики / Е. А Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 700 с. – ISBN: 5-7038-1768-4.
5. Shevchenko, Y. Order and disorder, crossovers, and phase transitions in dipolar artificial spin ice on the Cairo lattice / Y. Shevchenko et al // Physical Review E. – 2022. – Т. 106. – №. 6. – С. 064105.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-22-00328).

### Информация об авторах

**Шевченко Юрий Андреевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий Дальневосточного государственного университета. E-mail: shevchenko.ya@dvfu.ru.

**Лобанова Элиза Александровна** – студент 1-го курса, Дальневосточный государственный университет. E-mail: lobanova.eal@students.dvfu.ru.

**Трефилов Иван Викторович** – магистрант 1-го года обучения, Дальневосточный государственный университет. E-mail: trefilov.iv@students.dvfu.ru.

**Овчинников Павел Алексеевич** – магистрант 2-го года обучения, Дальневосточный государственный университет. E-mail: ovchinnikov.pa@dvfu.ru.

**Стронгин Владислав Сергеевич** – аспирант 1-го года обучения, Дальневосточный государственный университет. E-mail: strongin.vs@dvfu.ru.



## РАЗРАБОТКА КВАНТОВОГО АЛГОРИТМА ПОИСКА МИНИМУМА ЭНЕРГИИ В СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Д. П. Логинова<sup>1</sup>, В. С. Стронгин<sup>1,2</sup>, К. В. Нефедев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Департамент теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТнПМ ДВФУ, Владивосток*

<sup>2</sup>*Институт Прикладной Математики ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** Алгоритмы квантового поиска решают следующую задачу: в заданном пространстве поиска, содержащем  $N$  элементов без предварительной информации о структуре расположения элементов найти такой, который удовлетворяет заданному свойству. Классический алгоритм требует порядка  $N$  операций для осуществления решения такой задачи. Алгоритмы квантового поиска используют  $\sqrt{N}$  операций или шагов. В данной работе рассмотрен алгоритм квантового поиска минимума, расширенный из алгоритма поиска Гровера. Планируется разработка подхода к использованию алгоритма Гровера для решения задач поиска минимума энергии в спиновых системах.

**Ключевые слова:** квантовые вычисления, алгоритмы поиска квантового минимума, алгоритм поиска Гровера, спиновые системы

## DEVELOPMENT OF A QUANTUM MINIMUM SEARCHING ALGORITHM FOR SPIN SYSTEMS WITH INTERACTION

D. P. Loginova<sup>1</sup>, V. S. Strongin<sup>1,2</sup>, K. V. Nefedev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University, Vladivostok*

<sup>2</sup>*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok*

**Abstract.** Quantum search algorithms solve the following problem: A search space containing  $N$  elements is given and there is no preliminary information about the structure of the arrangement of elements in the search space. It is necessary in the given space of elements to find one that satisfies the given property. The classical algorithm requires about  $N$  operations to solve such a problem. Quantum search algorithms use  $\sqrt{N}$  operations or steps. In this paper, the existing algorithms for the quantum search for a minimum are considered. It is planned to develop an approach to using Grover's algorithm to solve problems of finding the energy minimum in spin systems.

**Key words:** quantum computing, quantum minimum search algorithms, Grover's algorithm, spin systems

Квантовые алгоритмы поиска минимума основаны на расширенном алгоритме поиска Гровера [1–3], который дает возможность полного доступа ко всем конфигурациям в  $2^N$  пространстве. Алгоритм Гровера – это квантовый алгоритм [4], который с высокой вероятностью находит уникальный вход для функции черного ящика, которая производит конкретное выходное значение, используя только  $O(\sqrt{N})$  оценки функции, где  $N$  – это размер домена функции. Как и многие квантовые алгоритмы, алгоритм Гровера является вероятностным. Не существует верхней границы количества повторений, которое может потребоваться до получения правильного ответа, ожидаемое количество повторений является постоянным фактором, который не увеличивается с  $N$ .

В оригинальной статье Гровера [4] алгоритм описан как алгоритм поиска в базе данных, и это описание до сих пор широко распространено. База данных представляет собой таблицу всех выходных данных функции, индексированных соответствующим входом. Таким образом, мы могли бы найти минимальное значение при особых условиях, используя алгоритмы, которые используют расширение алгоритма поиска Гровера.

Пусть  $T[0...N-1]$  – большая несортированная таблица из  $N$  элементов и каждое значение извлекается из упорядоченного множества, определяемое отношением  $\leq$ . Задача на поиск минимума означает, что необходимо найти значение  $y$  такое, что  $T[y] \leq T[i]$ , где  $0 \leq y \leq N-1$  и  $i = 0, \dots, N-1$ . В общем случае требуется  $O(N)$  итераций, чтобы найти минимум, используя классический алгоритм. Использование алгоритма квантового поиска для решения этой задачи требуется  $O(\sqrt{N})$  итераций.

Алгоритм Гровера ищет определенное подмножество элементов в неупорядоченном множестве. Алгоритм может найти подмножество квадратично быстрее, чем теоретический предел для классического аналога. Существует  $N = 2^n$  конфигураций  $n$  элементов, каждый из которых имеет два состояния. Таким образом  $n$  кубитов могут одновременно находиться в  $N=2^n$  состояниях.

Пусть равномерная суперпозиция всех  $N$  состояний определена как

$$|\psi\rangle H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle \quad (1)$$

где  $\otimes$  – оператор тензорного произведения.

Функция поиска минимума  $x$  может быть выражена как

$$f(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \neq x \\ 0 & \text{if } i = x \end{cases} \quad (2)$$

Квантовый оракул  $U_f$  для квантовой системы и оператор Гровера  $U_G$  обычно задаются унитарными операторами  $U_f : x, y \rightarrow |x, y \otimes f(i)\rangle$ , или

$$U_f |i\rangle |q\rangle = |i\rangle |q \oplus f(i)\rangle = (-1)^{f(i)} |i\rangle |q\rangle \quad (3)$$

$$U_G |\psi\rangle = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I) |\psi\rangle \quad (4)$$

Итерация Гровера состоит многократного применения функций оракула и Гровера. До тех пор, пока не будет найдено значение  $x$  в  $N$  элементах. Между тем существует и другой подход к уравнениям, представленным выше. Согласно [5] и [6], нахождение значения  $x$  может заменить поиском индекса  $i_0$ , где  $T[i_0] = x$  и  $0 \leq i_0 \leq N-1$ . После  $j$  итераций Гровера состояние квантового регистра выражается в явной закрытой форме формула для действительных чисел  $k_j$  и  $l_j$  [6]

$$|\psi(k_j, l_j)\rangle = k_j |i_0\rangle + \sum_{i=0, i \neq i_0}^{N-1} l_j |i\rangle \quad (5)$$

$$k_j = \sin((2j+1)\theta) \quad (6)$$

$$l_j = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \cos((2j+1)\theta) \quad (7)$$

где  $k^2 + (N-1)l^2 = 1$ ,  $\sin^2(\theta) = 1/N$ ,  $j$  – целое число.

Алгоритм поиска Гровера может быть расширен до нескольких кейс-решений. Пусть  $t$  – количество решений и  $A = \{i/T[i] = x\}$ ,  $B = \{j/T[j] \neq x\}$ . Из-за того, что мы усиливаем амплитуду правильных состояний, которая меньше средней амплитуды, количество правильных состояний, таких как  $t$  в этом разделе, должно быть меньше  $N/2$ , чтобы средняя амплитуда была больше нуля.

После  $j$  итераций Гровера, как и в (6), (7) и (8), состояние квантового регистра выражается в явной закрытой форме формулы для действительных чисел  $k_j$  и  $l_j$  [6].

$$|\psi(k_j, l_j)\rangle = \sum_{i \in A} k_j |i\rangle + \sum_{i \in B} l_j |i\rangle \quad (8)$$

$$k_j = \frac{1}{\sqrt{t}} \sin((2j+1)\theta) \quad (9)$$

$$l_j = \frac{1}{\sqrt{N-t}} \cos((2j+1)\theta) \quad (10)$$

где  $tk^2 + (N-t)l^2 = 1$ ,  $\sin^2(\theta) = t/N$  и  $j$  есть целое число.

Используя (12), можно оценить, сколько итераций нужно, чтобы получить один из элементов  $i$  из  $A$  с высокой вероятностью успеха. Делая вероятность элементов из  $B$  равной нулю, можно получить одно из решений. Из (12),  $j_0 = (\pi - 2\theta)/4\theta$  удовлетворяет условию  $lj_0 = 0$ . Тогда можно использовать  $\theta \approx \sin\theta = \sqrt{t/N}$  для  $t \ll N$ . Таким образом, уравнение для числа итераций  $j_0$  для нахождения решения можно выразить как

$$j_0 \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{N/t} = O(\sqrt{N/t}) \quad (11)$$

Алгоритм можно улучшить, остановившись на середине итераций и наблюдая за регистром. Если ответ неправильный, все начинается сначала. Ожидаемое количество итераций рассчитывается иначе [6]. Однако, ожидаемое количество итераций действительно только тогда, когда  $1 \leq t < N/2$ . Случаи  $t > N/2$  и  $t = 0$  можно разложить по формуле в соответствующие тайм-ауты.

### Библиографический список

1. Kang, Y. Quantum Minimum Searching Algorithm and Circuit Implementation / Y. Kang, J. Heo // ICTC 2020 – 11th International Conference on ICT Convergence: Data, Network, and AI in the Age of Untact. IEEE Computer Society. – 2020. – P. 214–219. – DOI: 10.1109/ICTC49870.2020.9289455.
2. King, A. D. Quantum critical dynamics in a 5,000-qubit programmable spin glass / A. D. King, J. Raymond, T. Lanting, R. Harris, et al. // Nature. – 2023. – V. 617(7959). – P. 1–6. – DOI: 10.1038/s41586-023-05867-2.
3. Durr, C. A quantum algorithm for finding the minimum / C. Durr, P. Hoyer // arXiv. – 1996. – P. 2. – DOI: 10.48550/arXiv.quant-ph/9607014.
4. Grover, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search // Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing. – 1996. – С. 212–219.
5. Quantum Computation and Quantum Information 10th Anniversary Edition / M. A. Nielsen, L. I. Chuang. – Cambridge University Press, 2010.
6. Boyer, M. Tight bounds on quantum searching / M. Boyer, G. Brassard, P. Hoyer, A. Tapp // PhysComp96. – 1996.
7. Hayes, J. Quantum Approaches to Logic Circuit Synthesis and Testing / J. Hayes, I. L. Markov // AFRL-IF-RS-TR-2006-216. – 2006.

### Благодарности

Исследование формализма проводилось в рамках гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2559.2022.1.2), исследование квантовой алгоритмизации проводилось в рамках гранта Благотворительного фонда Владимира Потанина № ГСГК-118/23.

### Информация об авторах

**Логинова Дарья Павловна** – студент 1-го курса магистратуры, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: loginova.dp@students.dvfu.ru.

**Стронгин Владислав Сергеевич** – аспирант 1-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: strongin.vs@dvfu.ru.

**Нефедев Константин Валентинович** – д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий ДВФУ. E-mail: nefedev.kv@dvfu.ru.

## МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕЖИМОМ РАБОТЫ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ МЕГАПОЛИСА

Л. С. Маергойз

*Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского  
отделения РАН», Красноярск*

**Аннотация.** В связи с актуальной проблемой уменьшения влияния вредных выбросов на состояние атмосферы городской среды представлена модель оптимального управления режимом работы источников загрязнения атмосферы мегаполиса. Модель предлагает математический алгоритм «справедливого» распределения выбросов в период неблагоприятных метеоусловий (НМУ), наиболее привлекательный для улучшения качества состояния атмосферы. Конструкция алгоритма основана на разработанной ранее оптимизационной математической модели распределения ограниченного ресурса социально-экономического содержания между группами людей, находящихся в дифференцируемых условиях.

**Ключевые слова:** контрольная зона источника, оптимальное распределение вредных выбросов, алгоритм управления режимом работы источников, экстремальная задача

## MODEL FOR OPTIMAL CONTROL THE ACTIVITY MODE OF THE POLLUTION SOURCES LOCATED IN A MEGACITY

L. S. Maergoiz

*Federal Research Center “Krasnoyarsk Scientific Center of the  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences”, Krasnoyarsk*

**Abstract.** In connection with the topical problem of creating comfortable atmosphere in urban habitat, we present a model for optimal control the activity mode of the pollution sources located in a megacity. The model suggest a mathematical algorithm for “equitable” allocation of quotas of harmful emissions during unfavourable weather conditions which is the best for creating comfortable atmosphere. Its construction is based on some recently developed optimization mathematical model of distribution of limited resources between differentiated groups of people.

**Key words:** control zone of the source, optimal distribution of the harmful emissions, algorithm for control the activity mode of the pollution sources, extremal problem

В докладе представлен математический подход к решению актуальной проблемы сведения вредного воздействия выбросов к *минимуму* в городах, особенно в мегаполисах, где много источников загрязнения, поддержания качества атмосферы городской среды на таком уровне, чтобы не создавалась угроза здоровью. Теоретический базис исследований заложен в работах [1–2]. В [2] была предложена общая схема алгоритмов управления работой источников загрязнения мегаполиса, опирающаяся на разработанную в [1] оптимизационную математическую модель распределения ограниченного ресурса социально-экономического содержания между группами людей, находящихся в дифференцируемых условиях.

В ситуации, когда регулирование выбросов в атмосферу требует принятия безотлагательных решений, а именно в периоды действия НМУ, чтобы не допустить возникновения высокого уровня загрязнения, необходимо кратковременное сокращение выбросов вредных для здоровья веществ с учетом категории режима НМУ [3]. В докладе рассматривается вариант распределения квот выбросов между источниками загрязнения, который представляется наиболее привлекательным для оздоровления состояния атмосферы города в период НМУ.

Объект исследования – группа источников мегаполиса, в состав выбросов которых входит одна и та же вредная для здоровья человека компонента (например, "пыль" или концентрация некоторого опасного для здоровья газа), но с различным уровнем содержания. Жилые микрорайоны, расположенные *вблизи* каждого источника загрязнения атмосферы города, образуют зону наибольшего риска для здоровья, причиняемого его вредными выбросами. *Контрольной зоной источника* (сокращенно зоной источника) назовем ту часть микрорайонов из упомянутой зоны риска с относительно однородным составом воздуха, выбранную по рекомендации экспертов, в которой состояние атмосферы подвержено минимальному влиянию других источников загрязнения. Полагаем априори, что такие зоны существуют для всех источников группы и не пересекаются.

Пусть для контроля за вредным влиянием источников измеряется совокупный объем (или вес)  $V$  выбросов в единицу времени в атмосферу части города, где расположены *все* зоны источников из рассматриваемой группы. Эта величина зависит от суммарной мощности источников загрязнения, погодных условий и других факторов. Важным аргументом определения параметра  $V$  является тот факт, что зоны источников представляют собой "ворота", через которые их выбросы попадают в атмосферу города. *Квотой вредных выбросов источника* назовем количество этих выбросов (в весовых или объемных единицах), попадающих в его зону за единицу времени (например, сутки). Если в период действия НМУ произвести распределение количества  $V$  выбросов между источниками путем разбиения на квоты таким образом, чтобы меньше было выбросов от самых "неблагополучных" источников с большой концентрацией вредных примесей, то это позволит улучшить состояние атмосферы города, сделать его более экологически чистым. Поэтому задача управления режимом работы группы источников загрязнения сводится к задаче распределения квот выбросов между ними.

Перейдем к описанию предлагаемой *оптимальной* модели управления режимом работы источников загрязнения в период действия НМУ.

Пусть  $N > 2$  – число источников загрязнения в группе. Введем нумерацию источников в направлении уменьшения вредности состава их выбросов для здоровья жителей зон этих источников. Т. е. номер 1 у источника с наиболее вредным для здоровья содержанием выбросов, а номер  $N$  у источника с наиболее комфортным содержанием выбросов (рейтинг источников). Параметры модели представлены в табл. 1, где  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Таблица 1 – Параметры модели

Параметры	Содержание
$V_k$	количество выбросов для источника с номером $k$ , попадающих в его зону за выбранную единицу времени
$S_k$	количество жителей, проживающих в зоне источника с номером $k$
$S$	общее количество населения всех зон источников
$c_k = V_k / S_k, c = V / S$	соответственно, плотность выбросов на душу населения зоны с номером $k$ , средняя плотность выбросов для всех зон
$\lambda_k = c_k / c$	безразмерная плотность выбросов на душу населения зоны с номером $k$
$s_k = S_k / S$	доля населения в зоне с номером $k$

Параметры модели удовлетворяют соотношению (см. [1, гл. 1]):

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k s_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N s_k = 1. \quad (1)$$

Наличие рейтинга источников означает, что здоровье жителей из разных зон источников в разной степени подвергается риску. Для выполнения принципа «справедливого» распределения квот выбросов между источниками потребуем выполнения условия (см. [1–2]):

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N. \quad (2)$$

Далее нам понадобится также целевой квадратичный функционал

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2 = c^{-2} \sum_{i=1}^{N-1} (c_{i+1} - c_i)^2, \quad (3)$$

принцип минимизации которого позволит свести к минимуму возможную неудовлетворенность жителей зон для смежных по рейтингу источников (см. [1–2]).

Зафиксируем по рекомендации экспертов города допустимый уровень  $V_1$  выбросов в единицу времени в атмосферу части города, где расположена зона самого «опасного» источника с наибольшей концентрацией вредных примесей. Такой подход к выбору «управляющей» характеристики модели представляется наиболее привлекательным для улучшения качества состояния атмосферы в период НМУ. Величина  $V_1$  однозначно определяется безразмерной плотностью выбросов на душу населения источника с номером 1 (см. табл. 1).

$$\lambda_1 = c_1/c = \gamma := \frac{V_1}{s_1 V}, \quad \lambda_1 = \gamma. \quad (4)$$

Здесь  $V$  – количество выбросов за единицу времени в атмосферу части города, где расположены все зоны источников (в период НМУ),  $s_1$  – доля населения в зоне с номером 1, а величина  $\gamma$  удовлетворяет условию  $0 < \gamma < 1$ .

**Экстремальная задача.** Найти значения параметров  $\lambda_k = \lambda_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , при которых достигается минимум функционала  $\Phi$  (см. (3)), если выполняются соотношения (1), (2) и «управляющее» равенство (4).

**Теорема 1.** Существует единственное решение экстремальной задачи.

**Модель оптимального управления.** Предельно допустимые квоты выбросов  $V_k$ , рекомендуемые для источников загрязнения, определяются формулами (см. (4), табл. 1)

$$V_k = c\lambda_k S_k = \lambda_k s_k V, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad V = \sum_{k=1}^N V_k.$$

### Библиографический список

1. Индикатор «счастья» в ресурсной экономике: экстремальный подход / Л. С. Маергойз, Р. Г. Хлебопрос. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. – С. 86 – DOI: 10.15372/INDICATOR2020MLS.
2. Маергойз, Л. С. Математический способ распределения квот вредных выбросов между их источниками в мегаполисе / Л. С. Маергойз // Сиб. журн. индустр. математики. – 2021. – Т. 24. – № 2. – С. 109–115. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.208.
3. Неблагоприятные метеорологические условия. Доступно в Интернете: <https://odin.ru/main/static.asp?id=1494> (дата обращения: 10.03.2023).

### Благодарности

Работа выполнена в рамках базового проекта ФИЦ «КНЦ СО РАН» № 122022600013-5.

### Информация об авторах

**Маергойз Лев Сергеевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., в.н.с. Института леса им. В. Н. Сукачева, ФИЦ «КНЦ СО РАН». E-mail: bear.lion@mail.ru.

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. А. Максимов

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** Исследуются решения краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной в случае смешанных краевых условий в контексте машинного обучения. Основным результатом работы является постановка задачи оптимизации и реализации алгоритма решения рассматриваемых задач с помощью нейронных сетей и алгоритмов машинного обучения.

**Ключевые слова:** краевая задача, обыкновенные дифференциальные уравнения, нейронные сети, машинное обучение, задача оптимизации, алгоритм обратного распространения ошибки

## APPLICATION OF NEURAL NETWORKS IN SOLVING OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

P. A. Maksimov

Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Abstract.** Boundary value problems are studied for nonlinear ordinary differential equations solved with respect to highest derivative in the case of mixed boundary conditions. The main result is the formulation of the optimisation problem and the implementation of the algorithm for solving problems under consideration using neural networks and machine learning algorithms.

**Key words:** boundary value problem, ordinary differential equations, neural networks, machine learning, optimisation problem, back propagation

На отрезке  $x \in [x_0, x_1]$  рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in (x_0, x_1), \quad (1)$$

со смешанными краевыми условиями:

$$a_{11}y(x_0) + a_{12}y'(x_0) = y_0, \quad (2)$$

$$a_{12}y(x_1) + a_{22}y'(x_1) = y_1, \quad (3)$$

Здесь  $a_{ij}$  – некоторые постоянные,  $f$  – непрерывная функция со своими первыми производными по аргументам  $y, y'$ .

В настоящей работе выведены критерии существования и единственности решения краевой задачи (1)–(3). Для решения с помощью алгоритмов нейронных сетей и машинного обучения полагается, что решение задачи (1)–(3) представляет собой некоторую нейронную сеть  $\hat{y}(x) \equiv \text{NN}(x)$ , относительно которой возможно производить операции дифференцирования и интегрирования в заданной области. Полагается, что нейронная сеть  $\hat{y}(x)$  является приближенным решением исходной краевой задачи, соответственно, для получения такого решения необходима задача оптимизации. (см. подробно [1, 2])

Реализация производится на основе алгоритма обратного распространения ошибки (back propagation). Вводятся следующие дифференциальные операторы:

$$D[\hat{y}(x)] = \hat{y}'' - f(x, \hat{y}, \hat{y}'),$$

$$B_0[\hat{y}(x)] = a_{11}\hat{y}(x_0) + a_{12}\hat{y}'(x_0) - y_0, \quad B_l[\hat{y}(x)] = a_{12}\hat{y}(x_l) + a_{22}\hat{y}'(x_l) - y_l.$$

Для обучения нейронной сети вводится следующий оператор:

$$F[y(x)] = (D[\hat{y}(x)])^2 + (B_0[\hat{y}(x)])^2 + (B_l[\hat{y}(x)])^2. \quad (4)$$

Оператор  $F$  представляет собой сумму квадратов невязки вычислительного алгоритма для уравнения и краевых условий, с помощью которого корректируются весовые коэффициенты для нейронов в сети. Таким образом, для получения точного решения ставится следующая задача оптимизации для (4):

$$F[y(x)] = \inf_x F[\hat{y}(x)], \quad x \in (x_0, x_l).$$

Очевидно, что с помощью вычислительных алгоритмов невозможно получить точного решения, но с помощью введения погрешности вычислений для оператора  $F$  возможно получить приближенное решение. В силу выполнения критериев существования и единственности решения гарантируется, что численное решение будет являться приближенным решением исходной краевой задачи. Алгоритм показал свою эффективность в решении линейных краевых задач для уравнений с переменными коэффициентами и нелинейных задач, решение которых было известно. Также был проведен сравнительный анализ алгоритма со следующими численными методами: метод стрельбы, метод конечных разностей, метод Галеркина (для линейных задач). В заключении указывается, что рассмотренный алгоритм является более точным, но при этом требует сравнительно больших вычислительных мощностей.

В дальнейшем алгоритм будет усовершенствован и применен для решения краевых задач для нелинейных моделей с частными производными, на примере уравнения реакции-диффузии-конвекции [3].

### Библиографический список

1. Lagaris, I. E. Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations / I. E. Lagaris, A. Likas, D. I. Fotiadis // IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS. – V. 9. – № 5 – 1998. – P. 987–1000.
2. Lin, Z. Research on Solving Ordinary Differential Equations (ODEs) Based on Machine Learning / Z. Lin, X. Lyu, R. Ma // 13th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE). – 2022 – P. 27–32. – DOI: 10.1109/ICMAE56000.2022.9852850.
3. Бризицкий, Р. В. Краевые и экстремальные задачи для нелинейного уравнения реакции-диффузии-конвекции при условии Дирихле / Р. В. Бризицкий, П. А. Максимов // Журн. вычисл. матем. матем. физики. – 2021. – Т. 61. – № 6 – С. 977–989. – DOI: 10.31857/S004446692106003X.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2023-946).

### Информация об авторах

**Максимов Павел Александрович** – аспирант направления 1.1.6 «Вычислительная математика» ДВФУ, ассистент департамента математического и компьютерного моделирования ДВФУ. E-mail: maksimov.pa@dvfu.ru.



## ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ХРОНИЧЕСКОГО ЛИМФОЛЕЙКОЗА

Н. Н. Максимова, А. Ю. Чепикова

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** В статье представлена математическая модель развития хронического лимфолейкоза, основанная на задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Эффект запаздывания проявляется в отсроченном эффекте воздействия химиопрепарата на раковые клетки. Для данной модели проведены вычислительные эксперименты при сочетании химиотерапии с иммунотерапией. Исследовано влияние параметра запаздывания на протекание болезни.

**Ключевые слова:** хронический лимфолейкоз, математическое моделирование, вычислительный эксперимент, раковые клетки, иммунные клетки, химиотерапия, иммунотерапия, задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

## A DETERMINISTIC MODEL WITH DELAY FOR STUDYING THE DYNAMICS OF CHRONIC LYMPHOLEUKEMIA

N. N. Maksimova, A. Yu. Chepikova  
Amur State University, Blagoveshchensk

**Abstract.** The article presents a mathematical model for the development of chronic lymphocytic leukemia, based on the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations with delay. The effect of the delay is manifested in the delayed effect of the chemotherapy drug on cancer cells. Computational experiments with a combination of chemotherapy and immunotherapy were carried out for this model. The influence of the delay parameter on the course of the disease was studied.

**Key words:** chronic lymphocytic leukemia, mathematical modeling, computational experiment, cancer cells, immune cells, chemotherapy, immunotherapy, Cauchy problem for a system of ordinary differential equations with delay

В настоящее время онкологические заболевания и способы их излечения волнуют не только врачей-клиницистов, но и специалистов в области математического моделирования. Моделирование динамики онкологических заболеваний осуществляется различными способами: модели с элементами неопределенности и детерминированные динамические модели.

Среди онкологических заболеваний выделяют рак крови. Хронический лимфолейкоз (ХЛЛ) – это онкологическое заболевание иммунокомпетентной системы, характеризующееся пролиферацией зрелых лимфоцитов. Рассматриваемая в работе модель развития хронического лимфолейкоза основана на системе ОДУ с запаздыванием, описывающей динамику развития ХЛЛ.

Будем использовать следующие обозначения:  $N = N(t)$  – количество опухолевых клеток,  $I = I(t)$  – количество «здоровых» иммунных клеток,  $Q = Q(t)$  – количество химиотерапевтического препарата в кровотоке. Динамика исследуемого онкологического заболевания описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{k} \right) - c_1 NI - \frac{\mu N Q_{-\tau}}{a + Q_{-\tau}}, \\ \frac{dI}{dt} = s(t) + s_0 - dI + \frac{\rho NI}{\gamma + N} - c_2 NI - \frac{\delta IQ}{b + Q}, \\ \frac{dQ}{dt} = q(t) - \lambda Q. \end{cases}$$

Все параметры модели неотрицательны, их описание и значения представлены в [1]. Представленная модель является модификацией модели, представленной в [1]. Здесь  $Q_{-\tau} = Q(t - \tau)$  обозначает количество химиотерапевтического препарата в кровотоке в момент времени  $(t - \tau)$ , где  $\tau$  – положительная константа, учитывающая фактор запаздывания при воздействии препарата на опухолевые клетки. Для решения начальной задачи будем задавать начальные условия:  $N(0) = N_0 > 0$ ,  $I(0) = I_0 \geq 0$  и  $Q(0) = 0$ .

Достоверным диагностическим признаком для постановления диагноза ХЛЛ является количество зрелых лейкоцитов более  $10^{10}$  клеток/л, суммарное количество лимфоцитов ( $N+I$ ) должно составлять 80–90 % от количества лейкоцитов [2].

Зависящая от времени функция химиотерапии  $q(t)$  является кусочно-заданной, что соответствует периодическому введению лекарства. В данных вычислительных экспериментах в качестве химиотерапевтического препарата будем использовать циклофосфамид. Согласно рекомендациям [3] выберем следующую схему лечения: 250 (мг/день)/м<sup>2</sup> (миллиграмм в день на квадратный метр поверхности тела) в течение первых трех дней при длительности курса 28 дней. Для гипотетического пациента ростом 1,7 м и весом 75 кг площадь поверхности тела составит 1,88 м<sup>2</sup>. Необходимая суточная доза будет равна  $q_i = 1,88 \cdot 250 = 470$  мг. Согласно инструкции к препарату период полувыведения составляет от 3 до 12 часов и зависит от особенностей организма; в наших расчетах примем  $t_{1/2} = 6$  (часов) = 1/4 (дня).

Из-за токсических эффектов химиопрепаратов и их губительного воздействия на весь организм имеет смысл проводить иммунотерапию в сочетании с приемом лекарств. Одним из возможных вариантов иммунолечения является так называемая адоптивная иммунотерапия [4]. При этом варианте суспензионные цитокин-активированные иммунные клетки в количестве от 2 до 10 млн собираются и вводятся пациенту паравертебрально внутрикожно в 2–4 точки стандартно на 3, 5, 7, 9 и т.д. дни. Примем количество иммунных клеток ( $s_i$ ) в каждый день лечения равным  $6 \cdot 10^6$ .

Пусть начальные значения опухолевых и здоровых клеток следующие:  $N(0) = 2 \cdot 10^{11}$ ,  $I(0) = 4 \cdot 10^8$ . Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 1.

Вычисления показали, что при 4 курсах химиотерапии 37 и менее курсов иммунолечения оказывается недостаточно для выздоровления пациента, причем при  $\tau = 5$  (сут.) и  $\tau = 15$  (сут.) болезнь прогрессирует быстрее, чем при отсутствии запаздывания, а при  $\tau = 20$  (сут.) – медленнее. В любом случае, после 3000–4500 дней (в зависимости от значения параметра  $\tau$ ) система приходит в стационарное состояние (негативное для пациента).

Для излечения болезни необходимо 40 или более курсов иммунотерапии. Параметр запаздывания также влияет на процесс выздоровления, однако прямая зависимость отсутствует (увеличение параметра  $\tau$  не приводит к замедлению или ускорению выздоровления).

Интересными оказываются случаи влияния параметра запаздывания, когда количество курсов иммунотерапии составляет 38 и 39. В разных случаях параметр запаздывания оказывает разное влияние на течение болезни. Так, например, для 38 курсов иммунотерапии при отсутствии запаздывания количество раковых клеток уменьшается, при наличии запаздывания – болезнь прогрессирует (рис. 1).

Для других вариантов задания начальных условий будем иметь иную динамику развития болезни. Изменение начального значения «больных» и «здоровых» клеток повлечет из-

менение количества курсов химио- и иммунотерапии для положительного для пациента исхода болезни.

Разумеется, на течение болезни влияют особенности конкретного организма и его индивидуальная реакция на конкретный препарат.

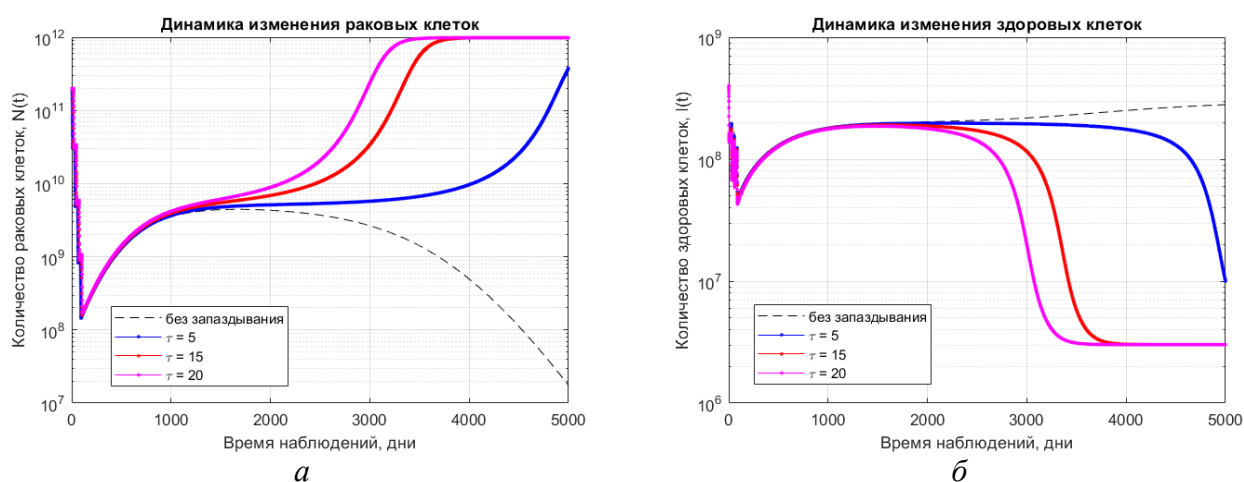


Рисунок 1 – Динамика развития лимфолейкоза при иммуно- и химиотерапии 4 курса химиолечения, 38 курсов иммунотерапии: динамика изменения раковых клеток – (а), динамика изменения иммунных клеток – (б)

### Библиографический список

1. Rodrigues, D. S. A mathematical model for chemoimmunotherapy of chronic lymphocytic leukemia / D. S. Rodrigues, P. F. A. Mancera, T. Carvalho, L. F. Gonçalves // *Applied Mathematics and Computation*. – 2019. – № 349. – P. 118–133. – DOI: 10.48550/arXiv.1806.05790.
2. Хронический лимфолейкоз: Монография / В. В. Войцеховский, Т. В. Заболотских, С. С. Целуйко, Ю. С. Ландышев, А. А. Григоренко. – Благовещенск: Изд-во ГБОУ ВПО Амурская ГМА Минздрава России, 2015. – С. 178.
3. Хронический лимфоцитарный лейкоз / лимфома из малых лимфоцитов: Клинические рекомендации. Доступно в интернете: <https://cr.minzdrav.gov.ru/recomend/134> (дата обращения: 27.10.2022).
4. Адоптивная иммунотерапия. ФГБУ «НМИЦ радиологии» Минздрава России. Доступно в интернете: <https://new.nmicr.ru/pacientam/metody-dagnostiki-i-lechenija/adoptivnaja-immunoterapija/> (дата обращения: 02.11.2022).

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

### Информация об авторах

**Максимова Надежда Николаевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, и.о. заведующего кафедрой математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: knnamursu@mail.ru.

**Чепикова Алиса Юрьевна** – студент 4-го курса кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета (направление подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика). E-mail: alisa\_chepikova@mail.ru.

## НЕЙРОСЕТЕВОЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ДЕФИЦИТОВ УЧИТЕЛЕЙ

Д. А. Минуллин, Л. Э. Хайруллина, Ф. М. Гафаров

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань*

**Аннотация.** В данной работе был проведен анализ профессиональных дефицитов учителей Республики Татарстан с помощью нейронных сетей. Нейросетевой анализ позволяет выявить тренды и паттерны в профессиональных дефицитах учителей, определить эффективные методы и программы повышения квалификации и предоставить персонализированные рекомендации для каждого учителя. Для интерпретации выводов использовались методы Integrated Gradients, SHAP и DeepLift, которые позволяют определять наиболее важные факторы.

**Ключевые слова:** объяснимый ИИ, нейронные сети, интеллектуальный анализ образовательных данных, Integrated Gradients, SHAP, DeepLift

## NEURAL NETWORK APPROACH TO THE ANALYSIS OF TEACHERS' PROFESSIONAL DEFICITS

D. A. Minullin, L. E. Khairullina, F. M. Gafarov

Kazan Federal University, Kazan

**Abstract.** This work analyzed the professional deficits of teachers in the Republic of Tatarstan using neural networks. Neural network analysis allows for the identification of trends and patterns in professional deficits among teachers, the determination of effective methods and training programs, and the provision of personalized recommendations for each teacher. Integrated Gradients, SHAP, and DeepLift methods were used to interpret the results and identify the most important factors.

**Key words:** explainable AI, neural networks, educational data mining, Integrated Gradients, SHAP, DeepLift

Современные тенденции в образовании, такие как внедрение цифровых технологий, переход к индивидуализированному обучению, повышение требований к качеству образовательных услуг и др., требуют от учителей высокого уровня профессиональной компетентности и гибкости в адаптации к новым условиям. В связи с этим учителя начинают испытывать затруднения при решении текущих профессиональных задач. Такие, осознанные или неосознанные, ограничения в профессиональной компетентности, препятствующие качественной реализации трудовых действий, относят к профессиональным дефицитам [5]. Выявление и дальнейшее устранение профессиональных дефицитов является важной социально-экономической задачей, без решения которой невозможно повышение качества образования.

**Данные.** В качестве аналитической базы были использованы данные об учителях и школах, собранные в государственной информационной системе "Электронное образование в Республике Татарстан" и результаты диагностики профессиональных компетенций учителей, которая проводилась в 2021-2022 гг. Результаты тестирования были сгруппированы по целевым блокам в соответствии с трудовыми функциями профессионального стандарта «Педагог»: нормативно-правовой, предметный, методический и психолого-педагогический блоки.

**Методы.** Для статистического и интеллектуального анализа образовательных данных

мы использовали разработанный ранее [4] вычислительный кластер на базе библиотеки Dask, предназначенный для работы с большими исходными данными.

В рамках исследования была разработана аналитическая система, основанная на нескольких моделях нейросетей - классификационных и регрессионных. Нейронные сети обучались прогнозировать профессиональные дефициты учителей. Для обучения классификационных моделей использовались сбалансированные наборы данных, в которых целевые значения для каждого учителя были отмечены как 1 для тех, у кого балл за тест оказался больше среднего значения по группе, или 0 в противном случае. На вход моделям подавались параметры учителя: категория учителя, общий стаж, педагогический стаж, стаж на должности, пол, возраст, специальность учителя, образование, предмет (one-hot encoding) и параметры школы: возраст школы, максимальное количество учеников в школе, сменность школы, тип школы, расположение школы (городская, сельская местность).

Для классификационных моделей мы использовали простые трёхслойные нейронные сети с прямой связью. Функция активации между первыми двумя слоями представляет собой линейную функцию выпрямления, а сигмоидальная форма используется для классификации в выходном слое. Для регрессионных моделей были использованы четырехслойные нейронные сети с прямой связью. Функция активации между скрытыми слоями представляет собой линейную функцию выпрямления с “утечкой”, которая помогает избежать зануление параметров.

Для объяснения предсказаний моделей глубокого обучения были использованы методы интерпретации Integrated Gradients, SHAP и DeepLift [1–3]. Они позволяют понять, какие признаки были наиболее важны для принятия решения моделью. Совместное использование различных методов интерпретации выводов нейронных сетей позволяет избежать недостатков отдельных методов и получить более полное и точное понимание работы нейронных сетей. Это связано с тем, что каждый метод интерпретации имеет свои сильные и слабые стороны, и использование только одного метода может привести к неполной или неточной интерпретации результатов.

**Результаты.** С помощью построенных моделей был осуществлен прогноз следующих показателей: общий балл за тест, баллы за вопросы тестирования в нормативно-правовом, предметном, методическом и психолого-педагогическом блоках. Для каждого показателя была обучена своя модель. Точность обучения моделей на показателе «Общий балл за тест» достигает 95 %, в то время как на остальных показателях находится в диапазоне 55–65 %.

Из полученных результатов можно заметить (рис. 1), что в случае классификационных моделей для каждого показателя положительное влияние имеют следующие параметры - категория учителя и его специальность, в то время как возраст учителя, сменность школы и её расположение всегда имеют негативное влияние. Остальные параметры плавающие.

Практически аналогичную ситуацию можно наблюдать для регрессионного анализа. Дополнительно к категории и специальности учителя положительное влияние приобретает его пол, максимальное количество учеников в школе и расположение школы.

**Заключение.** В данной работе была построена аналитическая система позволяющая анализировать дефицитарный уровень учителей Республики Татарстан и выявлять факторы, влияющие на него. Нейросетевой анализ может быть полезным инструментом для генерации рекомендаций по устранению профессиональных дефицитов. Полученные в работе результаты имеют практическую значимость и могут стать основой для подготовки персонализированных программ повышения квалификации.

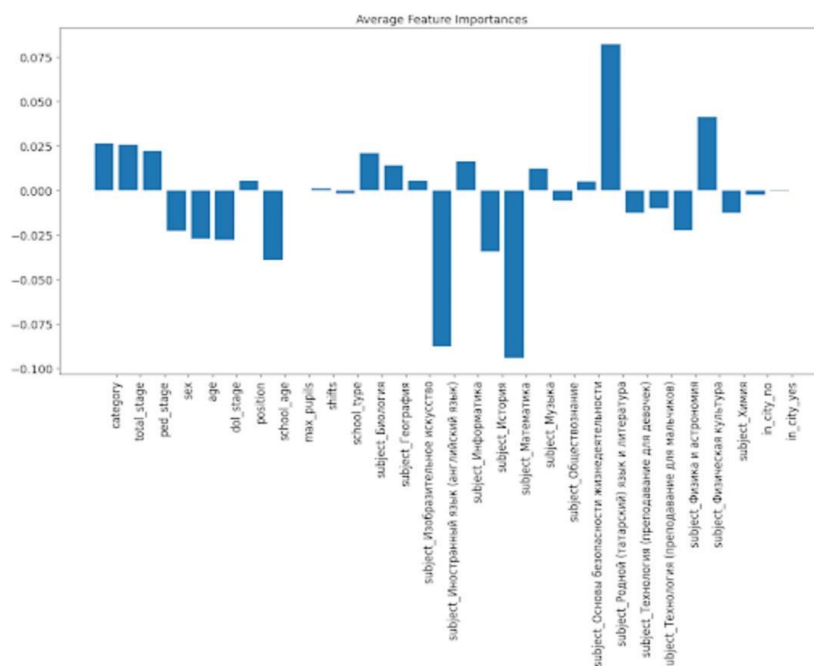


Рисунок 1 – Среднее значение вклада каждой функции для метода Integrated Gradients

### Библиографический список

1. Sundararajan, M. Axiomatic Attribution for Deep Networks / M. Sundararajan, A. Taly, Q. Yan // CoRR. – 2017. – DOI: abs/1703.01365.
2. Lundberg, S. A Unified Approach to Interpreting Model Predictions / S. Lundberg, Su-In Lee // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2017. – Т. 30. – P. 4768–4777.
3. Shrikumar, A. Learning Important Features Through Propagating Activation Differences / A. Shrikumar, P. Greenside, A. Kundaje // CoRR. – 2017. – DOI: abs/1704.02685.
4. Gafarov, F. M. Dask-based efficient clustering of educational texts / F.M. Gafarov, D.A. Minullin, V.R. Gafarova // CEUR Workshop Proceedings. – 2021. – Т. 3036. – P. 362–376.
5. Потёмкина, Т. В. Проблемы выявления профессиональных дефицитов учителей при проектировании программ повышения качества образования [Электрон. ресурс] / Т. В. Потёмкина // Источник. – 2018. – № 1. – С. 6–9. – Режим доступа: <https://istochnik.viro.edu.ru/wp-content/uploads/2022/06/Источник12018.pdf>.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 19-29-14082.

### Информация об авторах

**Минуллин Дмитрий Артурович** – аспирант 2-го года обучения, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». E-mail: minullin.dima@mail.ru.

**Хайруллина Лилия Эмитовна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». E-mail: liliya-v1@yandex.ru.

**Гафаров Фаиль Мубаракovich** – канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». E-mail: fgafarov@yandex.ru.

## ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К РЕАЛИЗАЦИИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЗАРЯДКИ ПОЛЯРНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Л. И. Мороз

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** Работа посвящена построению и программной реализации вычислительного алгоритма для обыкновенного дробного по времени дифференциального уравнения, лежащего в основе модели зарядки полярных диэлектриков. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дробно-дифференциального уравнения найдено с помощью явного трехшагового метода Рунге-Кутты. На основе примера с известным аналитическим решением проведена верификация приближенного решения задачи. Представлены иллюстрации результатов вычислительных экспериментов при варьировании порядка дробной производной.

**Ключевые слова:** зарядка диэлектриков, дробное обыкновенное дифференциальное уравнение, производная Капуто, вычислительный эксперимент

## NUMERICAL APPROACH TO REALIZATION OF RELAXATION FRACTIONAL-DIFFERENTIAL MODEL OF POLAR DIELECTRIC CHARGING

L. I. Moroz

*Amur State University, Blagoveshchensk*

**Abstract.** The work is devoted to the construction and software implementation of a computational algorithm for an ordinary time-fractional differential equation, which underlies the model of charging polar dielectrics. The numerical solution of the initial problem for an ordinary fractional differential equation is found using the explicit three-step Runge-Kutta method. We verified the approximate solution of the problem with the analytical solution. Results of computational experiments with varying the order of the fractional derivative are presented.

**Key words:** dielectric charging, fractional ordinary differential equation, Caputo derivative, computational experiment

На сегодняшний день математическое моделирование нашло широкое применение при описании поведения трудноформализуемых систем, например, таких как воздействие внешними потоками энергии на твердотельные материалы. Особое место в этом направлении занимает исследование процессов зарядки диэлектриков, индуцированных электронным облучением. Практический интерес данная область вызывает в связи с необходимостью прогнозировать состояние функциональных диэлектрических материалов при диагностике и модификации их свойств методами растровой электронной микроскопии. Одним из подходов при моделировании основных характеристик процесса зарядки диэлектриков является детерминированный подход [1]. В качестве объекта исследования рассмотрим класс полярных диэлектриков – сегнетоэлектрики. В серии работ [2] представлены результаты разработки средств и методов физико-математического моделирования динамических процессов зарядки в сегнетоэлектрических материалах. Предложена авторская модификация классической модели с учетом собственной радиационно-стимулированной проводимости объекта. Математически модель описывается системой соотношений, включающей нелинейное нестационарное реакционно-диффузионно-дрейфовое уравнение для определения пространственного распределения объемной плотности зарядов, локально-мгновенное уравнение Пуассона для

расчета распределения потенциала и уравнение, выражающее связь между полем напряженности, индуцированным инжектированными зарядами, и распределением потенциала:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = D\Delta\rho - \mu_n \left( E_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + E_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho^2 + G(r, z), \\ \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда, Кл/м<sup>3</sup>;  $D$  – коэффициент диффузии электронов, м<sup>2</sup>/с;  $\mu_n$  – дрейфовая подвижность электронов, м<sup>2</sup>/(В·с);  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость материала;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная, Ф/м;  $G(r, z)$  – генерационное слагаемое, отвечающее за действие объемного источника зарядов в объекте, Кл/(м<sup>3</sup>·с).

Введем в модель (1) следующие ограничения и свойства: в качестве носителей заряда рассмотрим только электроны, так как дырочная проводимость невелика; в образце отсутствует собственная проводимость и под действием электрического поля в диэлектрике дрейфуют инжектированные заряды; в силу того, что сегнетоэлектрики демонстрируют эффекты памяти, введем в уравнение дробную производную по времени [3].

Тогда задача (1) примет вид:

$$\frac{d^\alpha \rho}{dt^\alpha} = -\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho^2, \quad \rho(t_0) = \rho_0, \quad (2)$$

где  $t \geq t_0$ ,  $\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha}$  – дробная производная Капуто,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Аналитическое решение (2) в случае  $\alpha=1$ :  $\rho(t) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \rho_0}{\mu_n \rho_0 t + \varepsilon\varepsilon_0}$ .

Целью настоящей работы является предварительное исследование о влиянии порядка дробной производной по времени на искомую функцию в модели зарядки полярных диэлектриков.

В общем виде задача (2) сводится к виду:

$$\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0, \quad (3)$$

где  $y(t) \in C[t_0, T]$ ,  $f(t, y(t)) \in C[t_0, T] \times R$ .

Численное решение задачи Коши для обыкновенного дробно-дифференциального уравнения (3) построим на основе 3-шагового модифицированного метода Рунге – Кутты [4]:

$$\begin{cases} K_1 = h^\alpha f(t_i, y_i), \quad K_2 = h^\alpha f(t_i + c_2 h, y_i + a_{21} K_1), \quad K_3 = h^\alpha f(t_i + c_3 h, y_i + a_{31} K_1 + a_{32} K_2), \\ y_{i+1} = y_i + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3, \end{cases} \quad (4)$$

где  $w_1 = \frac{8\Gamma(1+\alpha)^3 \Gamma(1+2\alpha)^2 - 6\Gamma(1+\alpha)^3 \Gamma(1+3\alpha) + \Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}$ ,  $a_{11} = 0.5(\Gamma(\alpha+1))^{-1}$ ,

$$w_2 = \frac{2\Gamma(1+\alpha)^2 (4\Gamma(1+2\alpha)^2 - \Gamma(1+3\alpha))}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}, \quad a_{21} = \frac{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(2\alpha+1) + 2\Gamma(2\alpha+1) - \Gamma(3\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+1))},$$

$$w_3 = -\frac{8\Gamma(1+\alpha)^2 (2\Gamma(1+2\alpha)^2 - \Gamma(1+3\alpha))}{\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}, \quad a_{22} = -\frac{0.25\Gamma(2\alpha+1)}{2\Gamma(2\alpha+1)^2 - \Gamma(3\alpha+1)}, \quad c_2 = \left( \frac{0.5}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^{1/\alpha},$$

$$c_3 = \left( \frac{0.25}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^{1/\alpha}, \quad h - \text{шаг по времени, } i = \overline{0, N}, \quad t_i = t_0 + ih. \quad \text{Метод (4) абсолютно устойчив,}$$

если  $\left| 1 + \lambda h^\alpha / (\alpha!) + (\lambda h^\alpha)^2 / (2\alpha)! + (\lambda h^\alpha)^3 / (3\alpha)! \right| \leq 1$ ,  $\lambda - \text{const}$  перед  $y(t)$  функции  $f(t, y(t))$ .



Представим решение задачи (2) для  $\text{LiNbO}_3$ . Здесь  $\varepsilon = 40$ ,  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\rho_0 = 5.6 \cdot 10^6$  Кл/м<sup>3</sup>,  $\mu_n = 5.7 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/(В·с),  $t \in [0, 10^{-10}]$  с. Для удобства расчетов перейдем к нормализованным величинам  $\vartheta = \rho / \rho_0$ ,  $\tau = t / t_{\max}$ ,  $0 < \tau < 1$ . Таким образом, (2) запишем как

$$\frac{d^\alpha \vartheta}{d\tau^\alpha} = -90\vartheta^2, \quad \vartheta(0) = 1. \quad (5)$$

Численное решение, полученное на основе реализации алгоритма (4) при различных значениях порядка дробной производной  $\alpha$ , приведено на рис. 1а. Сравнение приближенного решения с точным решением при  $\tau = 1$ ,  $h \approx 0.004$  и  $\alpha = 0.99$  представлено на рис. 1б.

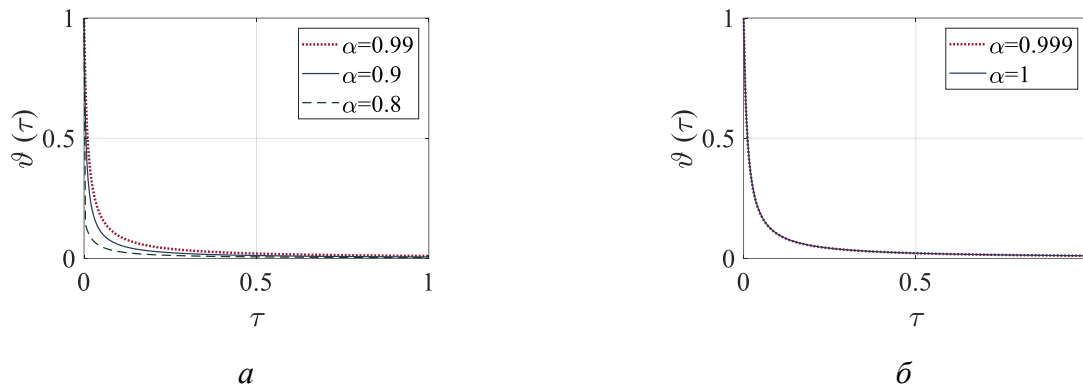


Рисунок 1 – Графическое представление  $\vartheta(\tau)$  при  $\alpha = 0.99$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $\alpha = 0.8$  (а), визуализация аналитического –  $\alpha = 1$  и численного решений задачи –  $\alpha = 0.999$  (б)

Уменьшение порядка  $\alpha$  приводит к более стремительному уменьшению искомой функции  $\vartheta(\tau)$ . Варьирование порядков дробных производных позволяет настраивать модель в соответствии с закономерностями, наблюдаемыми в экспериментах. Полученный результат может быть применен при моделировании процессов зарядки полярных диэлектриков в условиях электронного облучения.

### Библиографический список

1. Cazaux, J. About the mechanisms of charging in EPMA, SEM, and ESEM with their time evolution / J. Cazaux // Microscopy and Microanalysis, 2004. – V. 10. – P. 670–680.
2. Павельчук, А. В. Подход к численной реализации диффузионно-дрейфовой модели полевых эффектов, индуцированных движущимся источником физического эксперимента / А. В. Павельчук, А. Г. Масловская // Известия вузов. Физика, 2020. – Т. 63. – № 1 (745). – С. 94–100. – DOI: 10.17223/00213411/63/1/94.
3. Мороз, Л. И. Дробно-дифференциальные модели динамических откликов сегнето-электриков / Л. И. Мороз, А. Г. Масловская. – М.: Наука, 2022. – 159 с.
4. Ghoreishi, F. Fractional order Runge–Kutta methods / F. Ghoreishi, R. Ghaffari, N. Saad // Fractal Fract. – 2023. – V. 7(245). – DOI: 10.3390/fractalfract7030245.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 122082400001-8.

### Информация об авторах

**Мороз Любовь Игоревна** – канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственного университета. E-mail: lubover@mail.ru.

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ – ГИНЗБУРГА – ДЕВОНШИРА

Л. И. Мороз, А. Г. Масловская

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена построению численного алгоритма для решения волнового дробно-дифференциального уравнения Ландау – Гинзбурга – Девоншира. Вычислительный алгоритм строится на основе модифицированной неявной схемы и L2 аппроксимации дробной производной Капуто. Для сохранения точности в схему введена итерационная процедура.

**Ключевые слова:** уравнение Ландау – Гинзбурга – Девоншира, волновое дробно-дифференциальное уравнение, производная Капуто, неявная схема, итерационная процедура

## NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING THE TIME-FRACTIONAL WAVE LANDAU – GINZBURG – DEVONSHIRE EQUATION

L. I. Moroz, A. G. Maslovskaya  
Amur State University, Blagoveshchensk

**Abstract.** This work is devoted to the construction of a numerical algorithm for solving the wave fractional differential Landau – Ginzburg – Devonshire equation. The computational algorithm is based on a modified implicit scheme and L2 approximation of the Caputo fractional derivative. To maintain accuracy, an iterative procedure was introduced into the scheme.

**Key words:** Landau – Ginzburg – Devonshire equation, fractional wave equation, Caputo derivative, implicit scheme, iterative procedure

Начиная с 40-х годов прошлого века процессы и явления, происходящие в сегнетоэлектриках, успешно моделируются на основе теории фазовых переходов Ландау – Гинзбурга – Девоншира. Феноменологические модели, основанные на подходе Ландау – Гинзбурга – Девоншира (ЛГД), были и остаются важным инструментом в понимании базовой физики сегнетоэлектричества. С помощью теории ЛГД моделируют распределение поляризации, строят гистерезисные петли, исследуют взаимное влияние температуры и поляризации и т.д. В работе [1] при рассмотрении теории среднего поля ЛГД было выведено нелинейное эволюционное уравнение, описывающее распространение поляризации в тонкопленочных материалах, для которого показано наличие периодических солитонных решений:

$$\frac{m_d}{Q_d^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \kappa \Delta P + (g_1 - 2\mu) P + g_2 P^3 + g_3 P^5, \quad (1)$$

где  $P$  – поляризация;  $m_d$  – масса заряда;  $Q_d$  – плотность заряда; параметры  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  представляют температуру и давление;  $\kappa$  – коэффициент пространственной неоднородности; величина, обратная электрической восприимчивости, равна  $\mu$  [2].

Известно, что сегнетоэлектрические материалы демонстрируют сложный скейлинг доменных конфигураций, самоподобие процессов зародышеобразования доменов и эффекты памяти в процессе переключения поляризации. Для учета эффектов памяти, в уравнение (1) вводят дробную производную по времени [3]. Дополняя (1) начальными и граничными условиями, в общем виде получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{dt^\alpha} &= D \frac{\partial^2 u}{dx^2} + F(x, u), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
u(t=0, x) &= \zeta(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\
\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\
u(t, x=0) &= \varphi_1(t), \quad t \geq 0, \\
u(t, x=L) &= \varphi_2(t), \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $t \geq t_0$ ,  $\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha}$  – дробная производная Капуто,  $1 < \alpha \leq 2$ ;  $F(x, u) = au + bu^3 + cu^5$ .

Так как получение аналитических решений для дробно-дифференциальных уравнений, часто встречаются серьезные затруднения, оправданным является применение численных методов, в частности метода конечных разностей.

Введем в рассмотрение пространственно-временную сетку  $\Omega_h^\tau = \{x_i = (i-1)h, i = \overline{1, N}, t^j = (j-1)\tau, j = \overline{1, M}\}$ .

Используя аппроксимацию L2 дробной производной Капуто придем к вычислительной схеме [4]:

$$\frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(3-\alpha)} \sum_{k=1}^j s_k (u_i^{j-k} - 2u_i^{j-k+1} + u_i^{j-k+2}) = \frac{D}{2} (\Lambda u_i^{j+1} + \Lambda u_i^{j-1}) + F(x_i, u_i^{j+1}), \tag{3}$$

где  $s_k = k^{2-\alpha} - (k-1)^{2-\alpha}$ ,  $k = \overline{1, j}$ ;  $\Lambda u_i^{j\pm 1} = \frac{(u_{i-1}^{j\pm 1} - 2u_i^{j\pm 1} + u_{i+1}^{j\pm 1})}{h^2}$ . Для аппроксимации начального

условия применим схему с фиктивными узлами  $\frac{(u_i^2 - u_i^0)}{2\tau} = \psi_i$ . Для остальных условий

$u_1^j = \varphi_1^j$ ,  $u_N^j = \varphi_2^j$  для  $j = \overline{1, M}$ ;  $u_i^1 = \zeta_i$  для  $i = \overline{1, N}$ .

Поскольку (2) содержит нелинейное уравнение в частных производных, то рационально использовать итерационную процедуру, которая позволит решить систему линейных алгебраических уравнений. Формируем последовательность приближений  $u_i^{(p)}$  ( $p=1, 2, \dots$  – номер итерации) для каждого момента времени  $j$  сходящуюся к  $u_i^j$ . В качестве первоначального приближения используем формулы:  $(u_i^{(p)})^3 \approx (u_i^{(p-1)})^2 u_i^{(p)}$ ,  $u^5 \approx (u_i^{(p-1)})^4 u_i^{(p)}$ , начиная с  $(u_i^{(1)}) \approx u_i^j$ .

В следующих работах планируется проведение численного анализа полученного вычислительного алгоритма. Схема (3) может быть применена при моделировании оптических свойств в тонких пленках сегнетоэлектриков.

### Библиографический список

1. Hubert, M. B. Solitons in thin-film ferroelectric material / M. B. Hubert, M. Justin, N. A. Kudryashov, G. Betchewe, S. Y. Doka // Phys. Scr. – 2018. – V. 93. – P. 075201. – DOI 10.1088/1402-4896/aac407.
2. Chu, Y. Solitary wave dynamics of thin-film ferroelectric material equation / Y. Chu, S. Arshed, M. Sadaf, G. Akram, M. Maqbool // Results in Physics. – 2023. – V. 45. – P. 106201. – DOI 10.1016/j.rinp.2022.106201.
3. Мороз, Л. И. Дробно-дифференциальные модели динамических откликов сегнетоэлектриков / Л. И. Мороз, А. Г. Масловская. – М.: Наука, 2022. – 159 с.
4. Kuttler, C. Numerical simulation of time-fractional diffusion-wave processes applied to communication in bacterial populations / C. Kuttler, A. G. Maslovskaya and L. I. Moroz // Days on

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 122082400001-8.

### **Информация об авторах**

**Мороз Любовь Игоревна** – канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственного университета. E-mail: lubover@mail.ru.

**Масловская Анна Геннадьевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: maslovskayaag@mail.ru.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОРЯДКОВ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ

А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва*  
*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва*

**Аннотация.** Рассматривается задача определения интервальных значений порядков производных дробно-дифференциальных уравнений по экспериментальным интервальным данным на примере уравнения аномальной диффузии. Выполняется обобщение ранее разработанного подхода интервальной параметрической идентификации на данный класс задач.

**Ключевые слова:** дробная производная, аномальная диффузия, интервальные порядки производных, параметрическая идентификация, алгоритм адаптивной интерполяции

## IDENTIFICATION OF INTERVAL ORDERS OF DERIVATIVES OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. Yu. Morozov, D. L. Reviznikov

Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow

**Abstract.** The problem of determining the interval values of the orders of derivatives of fractional differential equations from experimental interval data is considered using the example of the anomalous diffusion equation. The previously developed approach of interval parametric identification is generalized to this class of problems.

**Key words:** fractional derivative, anomalous diffusion, interval orders of derivatives, parametric identification, adaptive interpolation algorithm

Дробно-дифференциальные уравнения часто применяются для описания аномальных процессов, например в задачах кинетики, химической физики, теплопроводности и др [1, 2].

Как правило, параметры уравнений определяются по экспериментальным данным, которые в свою очередь могут содержать в себе неопределенности связанные, например, с погрешностью измерений. Одним из способов учета подобных неопределенностей является переход к интервальным параметрам и моделям. Интервальные математические модели позволяют получать интервальные оценки на интересующие величины, которые содержат в себе экспериментальные данные, в отличие от классических моделей аппроксимирующих их.

Сначала рассмотрим прямую начально-краевую задачу для уравнения аномальной диффузии [3] с интервальными показателями производных:

$$\frac{\partial^\gamma c(x, t)}{\partial t^\gamma} = d(x) \frac{\partial^\alpha c(x, t)}{\partial x^\alpha} + q(x, t), \quad L \leq x \leq R, \quad t \geq 0, \\ c(x, t = 0) = F_0(x), \quad c(x = L, t) = F_L(t), \quad c(x = R, t) = F_R(t),$$

где  $c(x, t)$  — функция концентрации вещества;  $q(x, t)$  — функция источника (стока);  $d(x) \geq 0$  — коэффициент диффузии;  $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ ,  $\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$  — интервальные показатели производных,  $1 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} \leq 2$ ,  $0 < \underline{\gamma} \leq \bar{\gamma} \leq 1$ .

Для схемы численной аппроксимации вводятся следующие обозначения:  $\tau$  — шаг по времени:  $t_k = k\tau$ ;  $n$  — число отрезков, на которое делится исходный отрезок  $[L, R]$ ;  $h = (R - L)/n > 0$  — шаг сетки по пространственной координате;  $x_i = L + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ ;  $c_i^k = c(x_i, t_k)$ . В общем случае, концентрация  $c_i^k$  является функцией  $c_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$ , где  $\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ ,  $\xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$ . Для нахождения  $\mathbf{c}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = (\dots, c_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma), \dots)^T$  авторами работы ранее был разработан алгоритм адаптивной интерполяции [4], который позволяет построить явную, как правило, кусочно-полиномиальную функцию  $\mathbf{P}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = (\dots, P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma), \dots)^T$  интерполирующую  $\mathbf{c}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$  с контролируемой точностью. Решение исходной задачи в каждый  $k$ -й момент времени можно представить в виде прямого произведения интервалов:  $C^k = [c_0^k, \bar{c}_0^k] \times \dots \times [c_n^k, \bar{c}_n^k]$ , где  $\underline{c}_i^k = \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$ ,  $\bar{c}_i^k = \max_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$ .

Задача идентификации порядков производных возникает, когда границы интервалов  $\underline{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\underline{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}$  являются неизвестными, но есть экспериментальная информация о концентрации в моменты времени  $t_k$ , заданная в виде интервальных оценок:  $\hat{C}^k = [\hat{c}_0^k, \bar{\hat{c}}_0^k] \times \dots \times [\hat{c}_n^k, \bar{\hat{c}}_n^k]$ .

Необходимо найти такие значения  $\underline{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\underline{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}$ , чтобы  $\hat{C}^k \subseteq C^k$ , или чтобы степень не пересечения  $C^k$  и  $\hat{C}^k$  была минимальна.

Обобщим ранее разработанный подход [5] для решения данной задачи. Выполним переход к задаче минимизации отклонения модельного решения от экспериментальных данных. Минимизируется следующая целевая функция:

$$J(\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \underline{\gamma}, \bar{\gamma}) = \sum_k \sum_{i=0}^n \left( \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} [P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) - \underline{\hat{c}}_i^k]^2 + \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} [P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) - \bar{\hat{c}}_i^k]^2 \right)$$

Для применения в дальнейшем градиентных методов, определим производные:

$$J'_{\underline{\alpha}} = 2 \sum_k \sum_{i=0}^n \max \left( 0, \left[ P_i^k(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k) - \underline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k)}{d\underline{\xi}_\alpha} \right) + \max \left( 0, \left[ P_i^k(\bar{\xi}_{\alpha,i}^k, \bar{\xi}_{\gamma,i}^k) - \bar{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k(\bar{\xi}_{\alpha,i}^k, \bar{\xi}_{\gamma,i}^k)}{d\underline{\xi}_\alpha} \right),$$

$$J'_{\bar{\alpha}} = 2 \sum_k \sum_{i=0}^n \min \left( 0, \left[ P_i^k(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k) - \underline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k)}{d\bar{\xi}_\alpha} \right) + \min \left( 0, \left[ P_i^k(\bar{\xi}_{\alpha,i}^k, \bar{\xi}_{\gamma,i}^k) - \bar{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k(\bar{\xi}_{\alpha,i}^k, \bar{\xi}_{\gamma,i}^k)}{d\bar{\xi}_\alpha} \right),$$

где  $\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k = \arg \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} [P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) - \underline{\hat{c}}_i^k]^2$ ,  $\bar{\xi}_{\alpha,i}^k, \bar{\xi}_{\gamma,i}^k = \arg \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} [P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) - \bar{\hat{c}}_i^k]^2$ . Приведем

дополнительные правила сужения границ интервалов, которые применяются после каждого шага оптимизации:  $\underline{\alpha} = \min_{i=0, \dots, n; k=0, 1, \dots} (\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \bar{\xi}_{\alpha,i}^k)$ , если  $J'_{\underline{\alpha}} = 0$ ,  $\bar{\alpha} = \max_{i=0, \dots, n; k=0, 1, \dots} (\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \bar{\xi}_{\alpha,i}^k)$ , если  $J'_{\bar{\alpha}} = 0$ .

Производные  $J'_{\underline{\gamma}}$  и  $J'_{\bar{\gamma}}$ , а также правила сужения для  $\underline{\gamma}$  и  $\bar{\gamma}$  записываются аналогично. Таким образом, решение исходной задачи параметрической идентификации сводится к минимизации целевой функции с помощью градиентных методов. Сначала задается начальное приближение  $\underline{\alpha}^{(0)}$ ,  $\bar{\alpha}^{(0)}$ ,  $\underline{\gamma}^{(0)}$ ,  $\bar{\gamma}^{(0)}$ . На каждом шаге оптимизации решается прямая задача, далее с использованием полученных интерполяционных полиномов  $\mathbf{P}^k$  вычисляется градиент и определяется новое приближение.

В качестве примера выполним идентификацию интервального порядка производной по времени  $\gamma$ . Параметры уравнения:  $0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \alpha = 1.7, F_0(x) = 0, F_L(t) = 0, F_R(t) = t^2, q(x, t) = -x^2 t^2 + x^2 t^{1.3} \Gamma(3) / \Gamma(2.3), d(x) = x^{1.7} \Gamma(1.3) / \Gamma(3)$ . Параметры схемы аппроксимации:  $h = 0.05$  и  $\tau = 0.05$ . В качестве экспериментальных данных используются квазиэкспериментальные: решается прямая задача с  $\gamma \in [0.6, 0.9]$ , и из найденных интервальных оценок концентраций в моменты времени  $t_k = 0.1k, k = 1, \dots, 10$  выбираются случайные подынтервалы, которые далее используются в качестве экспериментальных данных. Начальное приближение в методе градиентного спуска  $\underline{\gamma}^{(0)} = 0.2$  и  $\bar{\gamma}^{(0)} = 0.3$ . На рис. 1 проиллюстрирован процесс параметрической идентификации. Светло-серым цветом показаны модельные решения, темно-серым цветом – экспериментальные данные.

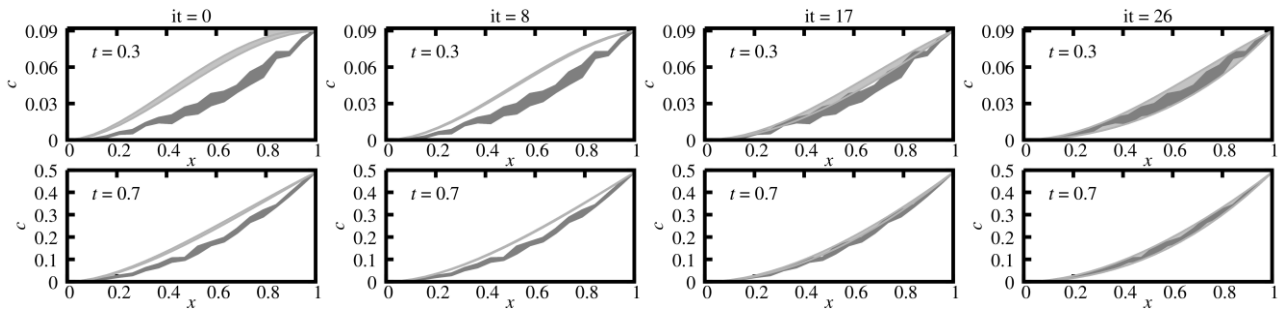


Рисунок 1 – Иллюстрация процесса параметрической идентификации

В процессе минимизации целевой функции модельное решение стремится покрыть экспериментальные данные, о чем свидетельствует уменьшение разницы между ними. На 26-й итерации метод градиентного спуска завершает свою работу, так как достигнут минимум целевой функции, который равен 0. Полученная интервальная оценка  $\gamma^{(27)} \in [0.6, 0.9]$  совпадает с исходной, что демонстрирует работоспособность и эффективность подхода [5].

### Библиографический список

1. Дробно-дифференциальные модели динамических откликов сегнетоэлектриков / Л. И. Мороз, А. Г. Масловская. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2022. – 198 с.
2. Ревизников, Д. Л. Численное моделирование аномальной диффузии бильярдного газа в полигональном канале / Д. Л. Ревизников, Ю. В. Сластуженский // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – № 5. – С. 3–14.
3. Петухов, А. А. Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений / А. А. Петухов, Д. Л. Ревизников // Вестник МАИ. – 2009. – Т. 16. – № 6. – С. 228–243.
4. Морозов, А. Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями / А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54. – № 7. – С. 963–974. – DOI: 10.1134/S0374064118070130.
5. Морозов, А. Ю. Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем / А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58. – № 7. – С. 962–976. – DOI: 10.31857/S0374064122070081.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 075-15-2020-799).

### Информация об авторах

**Морозов Александр Юрьевич** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела 27 ФИЦ ИУ РАН. E-mail: morozov@infway.ru.

**Ревизников Дмитрий Леонидович** – д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры 806 МАИ, ведущий научный сотрудник отдела 27 ФИЦ ИУ РАН. E-mail: reviznikov@gmail.com.

## ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПОРЯДКАМИ ПРОИЗВОДНЫХ

А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва*

**Аннотация.** В работе рассматриваются вопросы численного решения дробно-дифференциальных уравнений с интервальными параметрами в показателях производных. Выполняется обобщение ранее разработанного алгоритма адаптивной интерполяции на данный класс задач. На примере уравнения аномальной диффузии продемонстрирована эффективность предлагаемого подхода.

**Ключевые слова:** дробная производная, аномальная диффузия, разностная схема, интервальные параметры, алгоритм адаптивной интерполяции

## INTERPOLATION APPROACH TO SOLVING FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTERVAL ORDERS OF DERIVATIVES

A. Yu. Morozov, D. L. Reviznikov

*Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow*

**Abstract.** The paper deals with the numerical solution of fractional differential equations with interval parameters in terms of derivatives. The previously developed adaptive interpolation algorithm is generalized to this class of problems. Using the anomalous diffusion equation as an example, the effectiveness of the proposed approach is demonstrated.

**Key words:** fractional derivative, anomalous diffusion, difference scheme, interval parameters, adaptive interpolation algorithm

Вопрос обобщения производных на дробный порядок возник практически сразу с появлением дифференциального исчисления. С использованием дробных производных удастся описать системы с избирательной памятью и процессы в сложно-структурированных средах. В настоящий момент дробно-дифференциальное исчисление применяется в задачах химической физики, математической экономики, теории гравитации, вязкоупругости, теплопроводности и др [1–3].

Часто параметры систем не определены точно, а известны диапазоны их изменения. Это приводит к разбросу переменных состояния. Наиболее простым способом описать такую неопределенность является интервальная оценка возможных значений. В таком варианте задача формулируется в интервальной постановке.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения аномальной диффузии:

$$\frac{\partial^\gamma c(x, t)}{\partial t^\gamma} = d(x) \frac{\partial^\alpha c(x, t)}{\partial x^\alpha} + q(x, t), \quad L \leq x \leq R, \quad t \geq 0, \\ c(x, t = 0) = F_0(x), \quad c(x = L, t) = F_L(t), \quad c(x = R, t) = F_R(t),$$



где  $c(x, t)$  – функция концентрации вещества;  $q(x, t)$  – функция источника (стока);  $d(x) \geq 0$  – коэффициент диффузии;  $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ ,  $\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$  – интервальные показатели производных,  $1 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} \leq 2$ ,  $0 < \underline{\gamma} \leq \bar{\gamma} \leq 1$ .

Для схемы численной аппроксимации вводятся следующие обозначения:  $\tau$  – шаг по времени:  $t_k = k\tau$ ;  $n$  – число отрезков, на которое делится исходный отрезок  $[L, R]$ ;  $h = (R - L)/n > 0$  – шаг сетки по пространственной координате;  $x_i = L + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ ;  $c_i^k = c(x_i, t_k)$ ,  $d_i = d(x_i)$  и  $q_i^k = q(x_i, t_k)$ . Используются следующие конечно-разностные операторы на основе определения дробной производной Грюнвальда – Летникова [4]:

$$\frac{\partial^\gamma c(x_i, t_k)}{\partial t^\gamma} \approx \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{l=0}^k g_{\gamma, l} c_i^{k-l}, \quad \frac{\partial^\alpha c(x_i, t_k)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} g_{\alpha, j} c_{i-j+1}^k,$$

где  $g_{\alpha, j} = \Gamma(j - \alpha) / (\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1))$  и  $g_{\gamma, l} = \Gamma(l - \gamma) / (\Gamma(-\gamma)\Gamma(l + 1))$  – нормированные веса Грюнвальда – Летникова.

В общем случае, концентрация  $c_i^k$  является функцией  $c_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$ , где  $\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ ,  $\xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$ . Решение исходной задачи в каждый  $k$ -й момент времени можно представить в виде прямого произведения интервалов:  $C^k = [c_0^k, \bar{c}_0^k] \times \dots \times [c_n^k, \bar{c}_n^k]$ , где

$$\underline{c}_i^k = \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} c_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma), \quad \bar{c}_i^k = \max_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]} c_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma), \quad i = 0, \dots, n.$$

Цель алгоритма адаптивной интерполяции [5-7] заключается в построении вектор-функции  $\mathbf{P}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = (\dots, P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma), \dots)^T$  интерполирующей  $\mathbf{c}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = (\dots, c_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma), \dots)^T$ ,  $i = 0, \dots, n$  с контролируемой точностью. Дальнейшее определение  $C^k$  сводится к задачам условной оптимизации для явных функций  $P_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$  (как правило, кусочно-полиномиальных).

Построение вектор-функций  $\mathbf{P}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$ ,  $k \geq 0$  происходит последовательно.  $\mathbf{P}^0(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$  определяется явным образом:  $\mathbf{P}^0(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = (F_0(x_0), F_0(x_1), \dots, F_0(x_n))^T$ . Получение  $\mathbf{P}^{k+1}(\xi_\alpha, \xi_\gamma)$ , для произвольного  $k$ , заключается в интерполяции функции  $\mathbf{f}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = (\dots, f_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma), \dots)^T$ , заданной в соответствии с неявной схемой [4]:

$$g_{\xi_\gamma, 0} f_i^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) + \sum_{l=0}^k g_{\xi_\gamma, l+1} P_i^{k-l}(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = d_i \frac{\tau^{\xi_\gamma}}{h^{\xi_\alpha}} \sum_{j=0}^{i+1} g_{\xi_\alpha, j} f_{i-j+1}^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) + \tau^{\xi_\gamma} q_i^{k+1},$$

где  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $f_0^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = F_L(t_{k+1})$  и  $f_n^k(\xi_\alpha, \xi_\gamma) = F_R(t_{k+1})$ .

Традиционно интерполяционный полином  $\mathbf{P}^k$  строится по определенному набору узлов, которые образуют сетку. Поэтому сначала выполняется перенос решений, которые соответствуют узлам, на  $k+1$  временной слой, а далее в зависимости от значения погрешности интерполяции происходит адаптация. В общем случае интерполяционный полином  $\mathbf{P}$  может быть любым, необходимо только, чтобы была возможность контролировать погрешность интерполяции.

В качестве примера выполним решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^\gamma c(x, t)}{\partial t^\gamma} = d(x) \frac{\partial^\alpha c(x, t)}{\partial x^\alpha} + q(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad \alpha \in [1.2, 1.8], \quad \gamma \in [0.2, 0.8],$$

$$q(x,t) = -x^2 t^2 + x^2 t^{1.3} \Gamma(3)/\Gamma(2.3), \quad d(x) = x^{1.7} \Gamma(1.3)/\Gamma(3),$$

$$c(x,t=0) = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad c(x=0,t) = 0, t \geq 0, \quad c(x=1,t) = t^2.$$

Параметры схемы аппроксимации:  $h = 0.05$  и  $\tau = 0.05$ .

На рис. 1 представлены полученные интервальные значения концентраций в различные моменты времени.

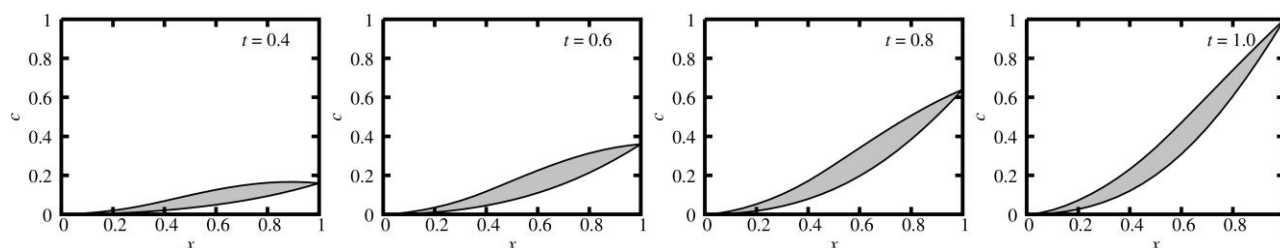


Рисунок 1 – Интервальная оценка решения задачи в различные моменты времени

Интервальные значения порядков производных привели к тому, что концентрация в каждой точке, за исключением граничных, стала тоже интервальной.

### Библиографический список

1. Дробно-дифференциальные модели динамических откликов сегнетоэлектриков / Л. И. Мороз, А. Г. Масловская. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2022. – 198 с.
2. Мороз, Л. И. Дробно-дифференциальная модель процесса теплопроводности сегнетоэлектрических материалов в условиях интенсивного нагрева / Л. И. Мороз, А. Г. Масловская // Математика и математическое моделирование. – 2019. – Т. 2. – С. 29–47.
3. Ревизников, Д. Л. Численное моделирование аномальной диффузии бильярдного газа в полигональном канале / Д. Л. Ревизников, Ю. В. Сластуженский // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – № 5. – С. 3–14.
4. Петухов, А. А. Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений / А. А. Петухов, Д. Л. Ревизников // Вестник МАИ. – 2009. – Т. 16. – № 6. – С. 228–243.
5. Морозов, А. Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями / А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54. – № 7. – С. 963–974. – DOI: 10.1134/S0374064118070130.
6. Гидаспов, В. Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции с использованием ТТ-разложения для моделирования динамических систем с интервальными параметрами / В. Ю. Гидаспов, А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61. – № 9. – С. 1416–1430. – DOI: 10.31857/S0044466921090106.
7. Морозов, А. Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределенностями / А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57. – № 7. – С. 976–987. – DOI: 10.31857/S0374064121070104.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 075-15-2020-799).

### Информация об авторах

**Морозов Александр Юрьевич** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела 27 ФИЦ ИУ РАН. E-mail: morozov@infway.ru.

**Ревизников Дмитрий Леонидович** – д-р. физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры 806 МАИ, ведущий научный сотрудник отдела 27 ФИЦ ИУ РАН. E-mail: reviznikov@gmail.com.

## ЭВОЛЮЦИЯ РАЗНЫХ ГАПЛОТИПОВ ФИТОПЛАНКТОНА В РЕЗУЛЬТАТЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЗООПЛАНКТОНА

Г. П. Неверова, О. Л. Жданова

*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** В работе исследуется модель эволюционной динамики планктонного сообщества. Предполагается, что фитопланктон представлен двумя генетически группами, которые конкурируют за ресурсы и отличаются наличием признака токсичности. Проведено аналитическое и численное исследование предложенной модели. Показано, что в областях мультистабильности возможна смена как динамического режима, так и состава сообщества за счет изменения текущего состава сообщества.

**Ключевые слова:** система «хищник-жертва», конкуренция, функция Холлинга II типа, модель Рикера, бифуркационный анализ, динамические режимы

## EVOLUTION OF DIFFERENT PHYTOPLANKTON HAPLOTYPES AS A RESULT OF THE IMPACT OF ZOOPLANKTON

G. P. Neverova, O. L. Zhdanova

*Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Vladivostok*

**Abstract.** We study a model of the evolutionary dynamics of the planktonic community. It is assumed that phytoplankton is represented by two genetic groups that differ in the trait of toxicity and compete for resources. An analytical and numerical study of the proposed model has been carried out. It is shown that in areas of multistability, shift in both the dynamic modes and the composition of the community is possible due to changing the current composition of the community.

**Key words:** predator-prey system, competition, type II Holling function, Ricker model, bifurcation analysis, dynamic modes

В рамках эколого-эволюционного направления моделирования [1, 2] токсичные свойства фитопланктона рассматриваются как его адаптивный признак «защиты от хищника», поскольку фитопланктон может быстро эволюционировать в ответ на хищничество зоопланктона [2]. В предлагаемой нами эволюционной модели в качестве изменчивого признака рассматривается защитный механизм фитопланктона от воздействия зоопланктона, который ведет к снижению потребления токсичного фитопланктона зоопланктоном. Соответственно фитопланктон представлен двумя генетически разными группами (гаплотипами) токсичным и нетоксичным. Отметим, что изменение токсичности зависит от взаимодействия между фитопланктоном и поедающим его зоопланктоном. Фитопланктон выпускает токсичные химические вещества, когда ощущает присутствие популяции зоопланктона вокруг. В ответ на эти химические вещества зоопланктон снижает уровень хищничества, что связано с неблагоприятным воздействием химических веществ на популяцию зоопланктона. Такое воздействие ведет к уменьшению потребления фитопланктона, снижению яйценоскости и выживаемости зоопланктона. Снижение уровня хищничества также может быть связано с защитным механизмом популяции зоопланктона, который включает в себя отбор или отказ от пищи. Например, *Copepods* проявляют избирательность при выборе пищи и избегают употреблять фитопланктон, продуцирующий токсины. В этом контексте, «отказ зоопланктона от потребления» или малое потребление

токсичного фенотипа, практически не сказывающееся на плотности фитопланктона и зоопланктона, как раз ведет к закреплению «признака токсичности» в данной группе, эволюция и развитие которой по большей части определяется процессами саморегуляции и конкуренцией за ресурсы со вторым фенотипом, у которого отсутствует «признак токсичности». В свою очередь эволюция и развитие второго генотипа фитопланктона определяется трофическими взаимодействиями с зоопланктоном: для описания процесса питания зоопланктона будем использовать функцию, учитывающую насыщение хищника, а именно трофическую функцию Холлинга второго типа. Таким образом, эколого-генетическая модель, описывающая эволюционную динамику такой системы, имеет вид:

$$\begin{cases} p_{n+1} = W_2 \cdot p_n / W_n \\ X_{n+1} = X_n \cdot W_n \\ Z_{n+1} = \frac{r \cdot X_n}{X^* / p_n + X_n} Z_n \exp(-\omega \cdot Z_n) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $W_n = W_1 \cdot q_n + W_2 \cdot p_n$ ,  $W_1 = A_1 \cdot e^{-X_n \left( a_1 q_n + b_1 p_n \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_0 \cdot Z_n}{X^* + p_n X_n} \right) \right)}$ ,

$$W_2 = A_2 \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_0 \cdot Z_n}{X^* + p_n X_n} \right) \cdot e^{-X_n \left( a_2 p_n \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_0 \cdot Z_n}{X^* + p_n X_n} \right) + b_2 q_n \right)}, \quad q_n = 1 - p_n.$$

В рамках модели (1)  $n$  – номер суток размножения,  $p$  – доля нетоксичного гаплотипа фитопланктона, что соответствует частоте аллеля без признака токсичности в популяции, долю токсичного гаплотипа (или частоту другого аллеля) обозначим  $q_n$ .  $W$  – средняя приспособленность фитопланктона, где  $W_1$  и  $W_2$  – приспособленности токсичного и нетоксичного гаплотипов, соответственно.  $X_n = X_{1,n} + X_{2,n}$  – общая численность фитопланктона,  $X_1$  и  $X_2$  – численности/плотности токсичного и нетоксичного гаплотипа фитопланктона,  $A_1$  и  $A_2$  – скорости роста 1-ого и 2-го гаплотипов фитопланктона, соответственно.  $a_1$  и  $a_2$  – коэффициенты самолимитирования,  $b_1$  и  $b_2$  – параметры, характеризующие интенсивность конкурентных взаимоотношений между гаплотипами.  $Z$  – численность зоопланктона,  $\omega$  – коэффициент его самолимитирования, а  $r$  – его максимально возможная скорость роста. Для описания процесса питания зоопланктона используется функция, учитывающая насыщение хищника:

$\frac{\alpha_0 \cdot z_n}{X^* + p_n X_n}$  – доля численности нетоксичного фитопланктона, потребляемая зоопланктоном,

где  $\alpha_0$  – коэффициент преобразования биомассы ( $\alpha_0 \gg 1$ ), а  $X^*$  – численность нетоксичного фитопланктона, при которой репродуктивный потенциал хищника равен половине от максимально возможного. Таким образом, происходит влияние хищника на размножение, конкуренцию и выживание жертвы.

Модель исследовалась как аналитически, так и численно. Устойчивость ее неподвижных анализировалась на основе собственных чисел Якобиана. Найденные неподвижные точки соответствуют возможным сценариям развития сообщества. Одним из сценариев является вырождение, и ему соответствует неподвижная точка с координатами  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{z} = 0$ , т.е. стационарные численности видов принимают нулевые значения; при этом генетический состав может быть различным  $\bar{p} = 0$ ,  $\bar{p} = 1$  или же  $0 < \bar{p} < 1$  при  $A_1 = A_2$ . Отметим, что данный сценарий оказывается возможным только при  $A_{1,2} < 1$  [3]. Другими словами если скорость роста жертвы в сообществе меньше 1, тогда оно со временем вырождается. Полутривиальные неподвижные точки соответствуют гибели зоопланктона, при этом фитопланктон продолжает существовать. Здесь неполное сообщество может быть представлено либо только токсичным гаплотипом, либо только нетоксичным фитопланктоном, либо обеими генетиче-

скими группами фитопланктона, которые конкурируют за ресурсы. Показано, что если конкуренция между гаплотипами, сильнее, чем их самолимитирование  $a_1a_2 - b_1b_2 < 0$ , то устойчивое сосуществование двух конкурентов невозможно, другими словами более приспособленный гаплотип вытесняет менее приспособленный, либо текущее соотношение гаплотипов определяет какой из них закрепится. Последний сценарий развития сообщества соответствует присутствию зоопланктона. Здесь возможны следующие варианты: редуцированное сообщество, представленное только хищником и его жертвой, т.е. когда токсичный фитопланктон оказывается не конкурентоспособным и погибает и полное сообщество, состоящее из трех компонент. Как оказалось в модели возникает бистабильность нетривиальных неподвижных точек как в присутствии, так и в отсутствие токсичного гаплотипа: в некотором диапазоне значений параметров устойчивое ненулевое решение может сосуществовать с другим нетривиальным равновесием, возникшим в результате касательной бифуркации и потерявшим устойчивость по сценарию Неймарка-Сакера. При этом тривиальное, полутривиальные и нетривиальные равновесия системы (1) разделены линиями транскритических бифуркаций.

Для изучения динамических режимов модели (1) в области неустойчивости были построены карты динамических режимов, позволяющие выявлять мультистабильность и бифуркации, возникающие в результате роста и вариации значений параметров. Карты построены следующим образом: в каждой точке плоскости параметров выполнялось 5000 итераций отображения, по результатам последних 500 шагов определялся период колебаний траектории, и эта точка окрашивалась в заданный цвет в соответствии с полученным периодом. Отметим, что карты динамических режимов отражают все аспекты аналитического исследования модели (1). В целом показано, что изменение соотношения текущих плотностей разных гаплотипов фитопланктона в результате влияния факторов внешней среды или же изъятия зоопланктоном, может привести к смене направления эволюции, которое может сопровождаться сменой режима динамики. В этом контексте потребление фитопланктона зоопланктоном и его избирательность при выборе пищи может играть ключевую роль в процессе эволюции планктонного сообщества.

### Библиографический список

- 1 Fussmann, G. F. Ecological and evolutionary dynamics of experimental plankton communities / G. F. Fussmann, S. P. Ellner, Jr. N. G. Hairston, L. E. Jones, K. W. Shertzer, T. Yoshida // *Advances in Ecological Research*. – 2005. – V. 37. – P. 221–243. – DOI: 10.1016/S0065-2504(04)37007-8.
- 2 Shertzer, K. W. Predator-prey cycles in an aquatic microcosm: Testing hypotheses of mechanism / K.W. Shertzer, S.P. Ellner, G.F. Fussmann, N.G.Jr. Hairston // *J. Anim. Ecol.* – 2002. – V. 71. – P. 802–815.
- 3 Kulakov, M. The Ricker competition model of two species: dynamic modes and phase multistability / M. Kulakov, G. Neverova, E. Frisman // *Mathematics*. – 2022. – V. 10(7). – DOI: 10.3390/math10071076.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00243, <https://rscf.ru/project/22-21-00243/>.

### Информация об авторах

**Неверова Галина Петровна** – д-р физ.-мат. наук, с.н.с., Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. E-mail: galina.nev@gmail.com.

**Жданова Оксана Леонидовна** – д-р физ.-мат. наук, в.н.с., Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. E-mail: axanka@iacp.dvo.ru.

## ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА ГИБРИДНЫМ РЕШЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ БОЛЬЦМАНА

А. Э. Ни

*Национальный Исследовательский Томский Политехнический университет, Томск*

**Аннотация.** Разработана гибридная модель на основе мезоскопических решеточных уравнений Больцмана и макроскопического уравнения энергии для моделирования процесса кондуктивно-конвективного теплопереноса с учетом неравномерного распределения теплового потока по внутренним границам замкнутой кубической полости. Вычислительный код разработан в высокоуровневой среде программирования MatLab. Представлены результаты численного моделирования процесса сопряженного теплообмена в трехмерной постановке при варьировании числа Рэлея, Кирпичева и относительных коэффициентов теплопроводности и температуропроводности.

**Ключевые слова:** гибридный решеточный метод Больцмана, естественная конвекция, сопряженный теплообмен

## THREE-DIMENSIONAL SIMULATION OF CONJUGATE HEAT TRANSFER BY THE HYBRID LATTICE BOLTZMANN METHOD

A. E. Nee

*National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk*

**Abstract.** A hybrid model based on the mesoscopic lattice Boltzmann equations and the macroscopic energy equation has been developed to simulate the process of conductive-convective heat transfer, taking into account the non-uniform distribution of the heat flux along the internal boundaries of a closed cubic cavity. The computational code was developed in the high-level programming environment MatLab. The results of numerical simulation of the process of conjugate heat transfer in a three-dimensional formulation with varying the Rayleigh and Kirpichev numbers and the relative coefficients of thermal conductivity and thermal diffusivity are presented

**Key words:** hybrid lattice Boltzmann method, natural convection, conjugate heat transfer

Исследования закономерностей сопряженного тепломассопереноса играют важную роль в науке и технике. Задачи кондуктивно-конвективного теплообмена встречаются в таких практических приложениях как строительная теплофизика, металлургия, охлаждение электроники, тепловая защита стенок в энергоустановках и т.д. Целью настоящей работы является построение гибридной математической модели, в рамках которой поле течения будет рассчитываться с привлечением решеточных уравнений Больцмана [1], а поле температур – конечно-разностным решением уравнения энергии.

Рассматривается замкнутая кубическая полость, заполненная воздухом и ограниченная теплопроводными стенками конечной толщины. Полагалось, что источник тепловыделения закреплен на верхней стенке. На внешних границах области решения ставились граничные условия 3 рода. Непрерывность теплового потока и температуры задавались на границах раздела сред «воздуха – стенка».

Решеточные уравнения Больцмана для описания поведения потока сплошной среды и уравнения энергии для поля температур имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{\tau} (f^{eq} - f), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u \frac{\partial T_1}{\partial x} + v \frac{\partial T_1}{\partial y} + w \frac{\partial T_1}{\partial z} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

Уравнение (1) решалось решеточным методом Больцмана [1], уравнения (2), (3) – традиционным конечно-разностным методом.

На рисунке 1 приведены распределение температур по высоте полости в плоскости симметрии в условиях варьирования относительного коэффициента теплопроводности.

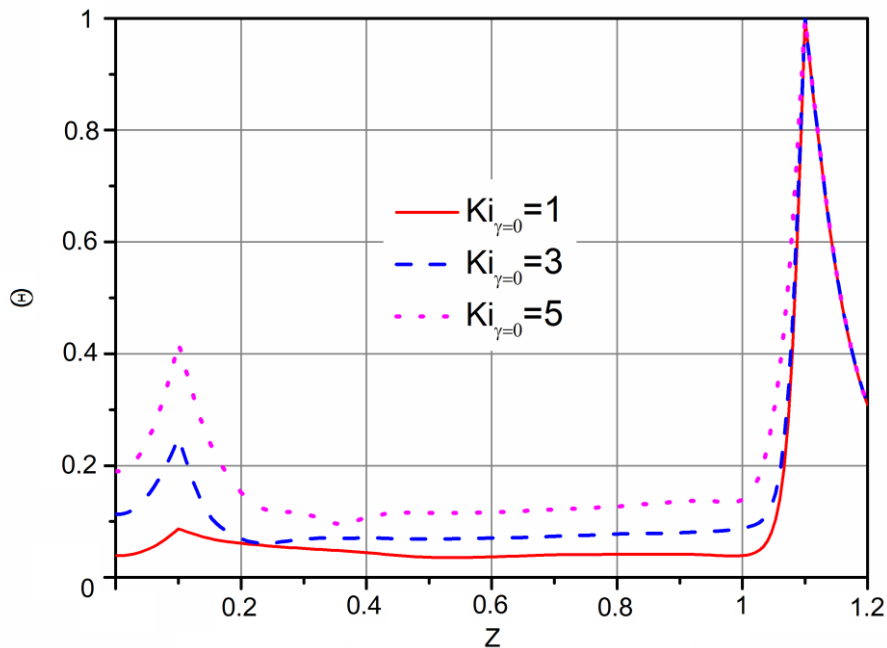


Рисунок 1 – Профили температур при  $Ra = 106$

По результатам численного моделирования установлено, что уменьшение относительного коэффициента теплопроводности приводит к увеличению температуры в области анализа. Более того, повышается температурный градиент в нижней теплопроводной стенке.

#### Библиографический список

1. Sharma, K. V. Current status of Lattice Boltzmann Methods applied to aerodynamic, aeroacoustic, and thermal flows / K. V. Sharma, R. Straka, F. W. Tavares // Progress in Aerospace Science. – 2020. – Т. 115. – Р. 100616.

#### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00011.

#### Информация об авторах

**Ни Александр Эдуардович** – канд. физ.-мат. наук, доцент научно-образовательного центра И. Н. Бутакова Инженерной школы энергетики Томского политехнического университета. E-mail: nee\_alexander@mail.ru.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СКРЫТЫХ ПЕРКОЛИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ В МОДЕЛИ ИЗИНГА АЛГОРИТМАМИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

П. А. Овчинников, И. В. Трефилов, Э. А. Лобанова, В. С. Стронгин, Ю. А. Шевченко

*Департамент теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТУПМ ДВФУ,  
Владивосток  
Институт Прикладной Математики, ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** В данной работе рассматривается возможность применения алгоритмов нейронных сетей для исследования скрытых перколирующих процессов в модели Изинга. С помощью алгоритма свёрточной нейронной сети классифицируется фаза системы.

**Ключевые слова:** модель Изинга, перколяция, машинное обучение, свёрточная нейронная сеть

## INVESTIGATION OF HIDDEN PERCOLATE PROCESSES IN THE ISING MODEL BY NEURAL NETWORKS ALGORITHMS

P. A. Ovchinnikov, I. V. Trefilov, E. A. Lobanova, V. S. Strongin, Y. A. Shevchenko

*Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University,  
Vladivostok*

*Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Science, Vladivostok*

**Abstract.** In this paper, we consider the possibility of using neural network algorithms to study hidden percolation processes in the Ising model. Using the convolutional neural network algorithm, the phase of the system is classified.

**Key words:** Ising model, percolation, machine learning, convolutional neural network

В настоящее время фазовые переходы и критические явления представляют большой интерес для исследования как с теоретической, так и с практической точек зрения. Модели, в которых наблюдаются фазовые переходы, могут находить применение не только в физике, такой как статистическая физика, физика конденсированного состояния и т. д., но и в других смежных областях, таких как биомедицина, биология, экология и экономика.

Наибольший интерес представляют критические индексы и критические значения параметров фазовых переходов, при достижении которых система переходит из одной фазы в другую. В последнее время для решения подобных задач начали применяться новые вычислительные подходы, такие как машинное обучение и нейронные сети [1].

Например, в статистической физике можно рассмотреть случай перколяции ферромагнитных и антиферромагнитных кластеров сквозь решётку спинов Изинга, представленный на рис. 1.

Подобные модели используют для изучения и других явлений, таких как электропроводимость, полимеризация, протекание пористых материалов, распространение эпидемий, надежность компьютерных систем и другие.



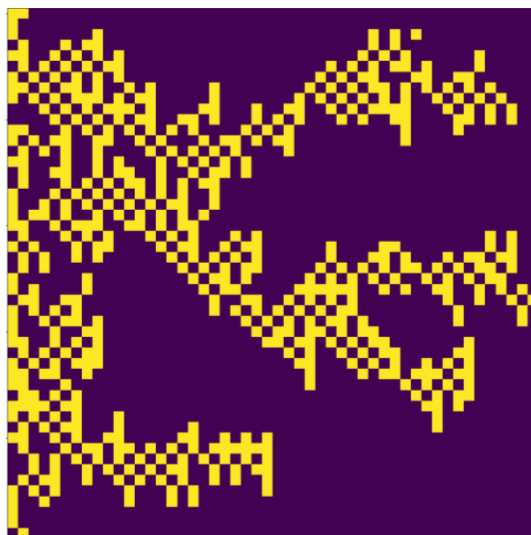


Рисунок 1 – Перколирующий кластер в модели Изинга, желтым цветом обозначены занятые узлы, фиолетовым цветом обозначены свободные узлы

Чаще всего рассматривают перколяцию в двумерных системах, либо в одномерных системах, с развитием во времени. Моделирование перколирующего процесса в одномерной системе с параллельным обновлением представляет стохастический клеточный автомат [2], где влияние спинов друг на друга задается правилами, определяющими вероятность перехода спина из одного состояния в другое представленными в таблице 1.

Таблица 1 – Правила перехода спина из одного состояния в другое

$n_{i-1}, n_i, n_{i+1}$	111,110,011,010	100,001	101	000
Вероятность ( $n_i = 1$ )	$p$	$q$	$q(2 - q)$	0

Наличие или отсутствие перколяции при заданных правилах, а также характеристики получаемых перколирующих кластеров, такие как размер, количество и расположение, активно исследуются в подобных классах задач.

Скрытый перколирующий процесс возникает, когда протекание сквозь узлы решетки основывается на взаимодействии нескольких спинов друг с другом. В модели Изинга часто рассматривают пару спинов ферромагнетик-антиферромагнетик. В таком случае система считается перколирующей если можно построить кластер из пар ферромагнетик-антиферромагнетик от одной границы системы к другой [2].

Благодаря возможности с высокой точностью анализировать изображения, современные алгоритмы машинного обучения можно применять для изучения скрытых перколирующих процессов без использования других алгоритмов обработки систем [3]. Поскольку система с перколирующим кластером представляет из себя двумерную матрицу, алгоритмы нейронных сетей позволяют исследовать её с помощью методов разработанных для эффективного анализа изображений. Так свёрточные нейронные сети могут позволить определить фазу исследуемой системы, найти  $q$  и  $p$  параметры, определить размер или протяженность кластера, а алгоритмы сетей на основе свёрточных автоэнкодеров могут позволить моделировать скрытый перколирующий процесс на основе разных паттернов взаимодействия имея некоторый набор исходных и результирующих систем.

Используя алгоритмы свёрточных нейронных сетей, была исследована зависимость фаз системы от вероятностных параметров  $q$  и  $p$ , используемых при её развитии и получена фазовая диаграмма представленная на рис. 2.

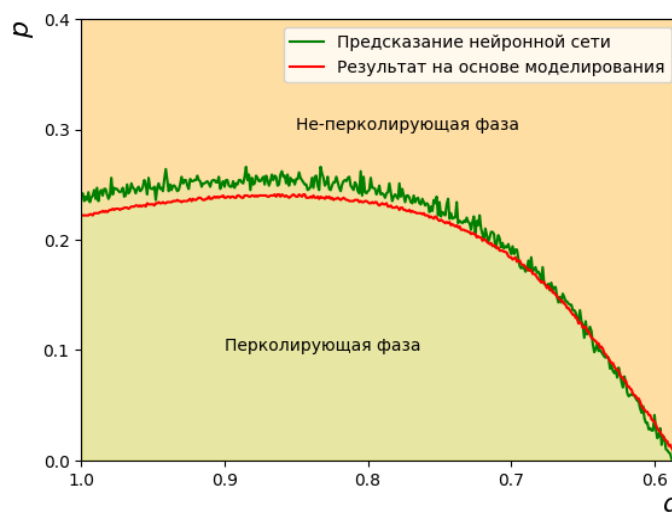


Рисунок 2 – Зависимость фазы систем от вероятностных параметров  $q$  и  $p$

На фазовой диаграмме представлена граница перехода между не-перколирующим состоянием и перколирующей системой.

Дальнейший исследовательский интерес представляет определение параметра порядка системы, в качестве которого может выступать максимальный размер скрытого перколирующего кластера. Также в дальнейшем планируется более подробное исследование границы перехода.

### Библиографический список

1. Shiina, K. Machine-learning studies on spin models / K. Shiina, H. Mori, Y. Okabe, H. K. Lee // Scientific reports. – 2020. – V. 10. – P. 1–6. – DOI: 10.1038/s41598-020-58263-5.
2. Timonin, P. N. Hidden percolation transition in kinetic replication process / P. N. Timonin, G. Y. Chitov // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2015. – T. 48. – №. 13. – С. 135003. – DOI: 10.1088/1751-8113/48/13/135003.
3. Shen, J. Transfer learning of phase transitions in percolation and directed percolation / J. Shen, F. Liu, S. Chen, D. Xu, X. Chen // Physical Review E. – 2022. – T. 105. – №. 6. – С. 064139. – DOI: 10.1103/physreve.105.064139.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет средств Фонда ДВФУ, проект № Д-171-22, в рамках Госзадания ИПМ ДВО РАН (№075-01290-23-00).

### Информация об авторах

**Овчинников Павел Алексеевич** – магистрант 1-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: ovchinnikov.pa@dvfu.ru.

**Трефилов Иван Викторович** – магистрант 1-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: trefilov.iv@students.dvfu.ru.

**Лобанова Элиза Александровна** – студент 1-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: lobanova.eal@students.dvfu.ru.

**Стронгин Владислав Сергеевич** – аспирант 1-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: strongin.vs@dvfu.ru.

**Шевченко Юрий Андреевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТиПМ ДВФУ. E-mail: shevchenko.ya@dvfu.ru.

## ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ВНУТРИВЕННОЙ ЛАЗЕРНОЙ АБЛЯЦИИ

Н. М. Пак, А. Е. Ковтанюк

*Дальневосточный Федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** Рассмотрена начально-краевая задача для нелинейной модели внутривенной лазерной абляции. Предлагается алгоритм нахождения ее решения. Эффективность алгоритма иллюстрируется численными экспериментами.

**Ключевые слова:** радиационно-кондуктивный теплообмен, начально-краевая задача, внутривенная лазерная абляция, итерационный алгоритм

## ITERATIVE ALGORITHM FOR SOLVING AN INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A MODEL OF INTRAVENOUS LASER ABLATION

N. Park, A. Kovtanyuk

Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Abstract.** An initial-boundary value problem for a nonlinear model of endovenous laser ablation is considered. An algorithm for finding its solution is proposed. The efficiency of the algorithm is illustrated by numerical experiments.

**Key words:** radiative-conductive heat transfer, initial-boundary value problem, endovenous laser ablation, iterative algorithm

Одним из методов лечения варикозного расширения вен является внутривенная лазерная абляция (ВВЛА). При проведении ВВЛА лазерное оптоволокно вводится в поврежденную вену. Далее оптоволокно вытягивается, при этом по нему передается лазерное излучение. Торцевое оптоволокно обычно покрыто карбонизированным слоем. Одна часть поступающей энергии идет на нагрев карбонизированного слоя, другая часть идет на излучение, при поглощении которого выделяется тепловая энергия. Тепло от нагретого карбонизированного слоя передается в кровь и окружающую ткань посредством кондуктивного теплообмена. Теплообмен многократно усиливается за счет потока пузырьков, образующихся на разогретом торце оптоволокна. В итоге поступившая за счет различных механизмов тепловая энергия вызывает значительный нагрев вены, что приводит к ее облитерации. В работе [1] теплообмен потоком пузырьков моделируется путем следующей зависимости коэффициентом теплопроводности от температуры: если температура в некоторых точках крови достигает  $95^{\circ}\text{C}$  и выше, коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз. Отметим, что в настоящей работе модель ВВЛА будет также учитывать внутреннее тепловое излучение (излучение черного тела).

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в ограниченной трехмерной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ .

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \nabla (k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad (1)$$

$$-\nabla (a \nabla \varphi) + \beta (\varphi - \theta^3 |\theta|) = g, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$\theta|_{\Gamma} = \theta_b, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma (\varphi - \theta_b^4) \Big|_{\Gamma}, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (3)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная (обезразмеренная) температура,  $\varphi$  – нормализованная

интенсивность излучения. Нормирующие множители обозначаются  $M_\theta$  и  $M_\varphi$  соответственно. Положительные параметры  $b, \alpha, \beta, \gamma$  описывают радиационные и теплофизические свойства среды [2],  $\sigma(x, t)$  – произведение удельной теплоемкости на объемную плотность,  $k(\theta)$  – коэффициент теплопроводности,  $f$  и  $g$  описывают вклад источников тепла и излучения соответственно. Символом  $\partial_n$  обозначается производная по направлению внешней нормали  $n$  к границе  $\Gamma$ .

Перенос тепла и излучения будем рассматривать в среде, состоящей из четырех частей, которые интерпретируются как кровь, стенки вены, перивенозная ткань и оптическое волокно. Расчетная область в цилиндрической системе координат в случае угловой симметрии представлена на рис. 1.

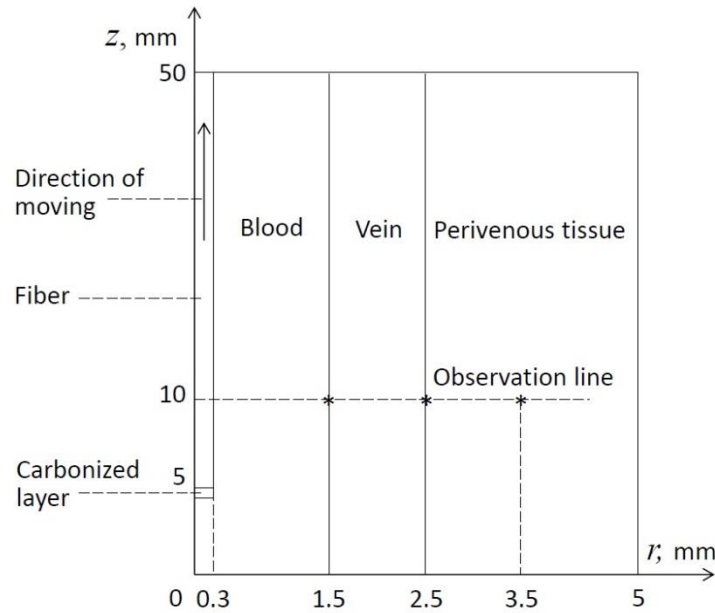


Рисунок 1 – Расчетная область

Для нахождения решения начально-краевой задачи (1)–(3) дискретизируем интервал времени  $(0, T)$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Для каждого момента времени  $t = t_l = l\Delta t$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$  используется итерационный алгоритм нахождения решения соответствующей краевой задачи, его  $n$ -й шаг,  $n = 1, 2, \dots, N$ , выглядит следующим образом:

$$-\Delta(\alpha \nabla \varphi_n) + \beta(\varphi_n - \theta_{n-1}^3 |\theta_n|) = g, \quad (4)$$

$$\sigma(\theta_n - \theta_M|_{t=t_{l-1}}) / \Delta t - \nabla(k(\theta_{n-1}) \nabla \theta_n) + b(\theta_{n-1}^3 |\theta_n| - \varphi_n) = f, \quad (5)$$

$$\theta_n|_\Gamma = \theta_b, \quad \alpha \partial_n \varphi_n + \gamma(\varphi_n - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (6)$$

где функции  $\theta_n, \theta_{n-1}, \varphi_n$  есть аппроксимации решения, соответствующие моменту времени  $t = l$ .

Для инициализации итерационной процедуры задаем начальное приближение температуры для каждого момента времени:

$$\theta_0|_{t=t_l} = \theta_M|_{t=t_{l-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad \theta_M|_{t=t_0} = \theta_{in}. \quad (7)$$

В уравнениях (4) и (5),  $g = P_\varphi \chi / M_\varphi$ ,  $f = P_\theta \chi / M_\theta$ , где  $P_\varphi$  – мощность источника, затрачиваемая на излучение,  $P_\theta$  описывает мощность источника, затрачиваемая на нагрев наконечника оптоволокну,  $\chi$  – характеристическая функция части среды, в которой находится наконечник оптоволокну, деленная на его объем.

Для реализации каждого шага итерационного алгоритма (4)–(7) использовался метод конечных элементов с использованием программного пакета FreeFEM++ (<https://freefem.org/>). Оптические и теплофизические параметры среды взяты из [1]. Параметры  $\theta_b$  и  $\theta_{in}$  соответствуют температуре 37°C, а коэффициент  $\gamma = 0.5$ . Начальное положение наконечника оптоволоконна соответствует  $(r, z) = (0, 5)$ , а его скорость равна 2 мм/с.

Эффективность лазерной абляции можно оценить по поведению профилей температуры в разных точках расчетной области. На рис. 2 показано поведение профилей температуры в точках (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10) для излучения с длиной волны 1950 нм и мощностью источника  $(P_\phi, P_\theta) = (4.5 \text{ Вт}, 1.8 \text{ Вт})$ . Из поведения графиков видно, что температура на внешней стенке вены и в перивенозной ткани вполне безопасна. В то же время температура внутри вены достаточна для ее успешной облитерации.

Таким образом, использование компьютерного моделирования является перспективным способом определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих эффективное и безопасное проведение ВВЛА.

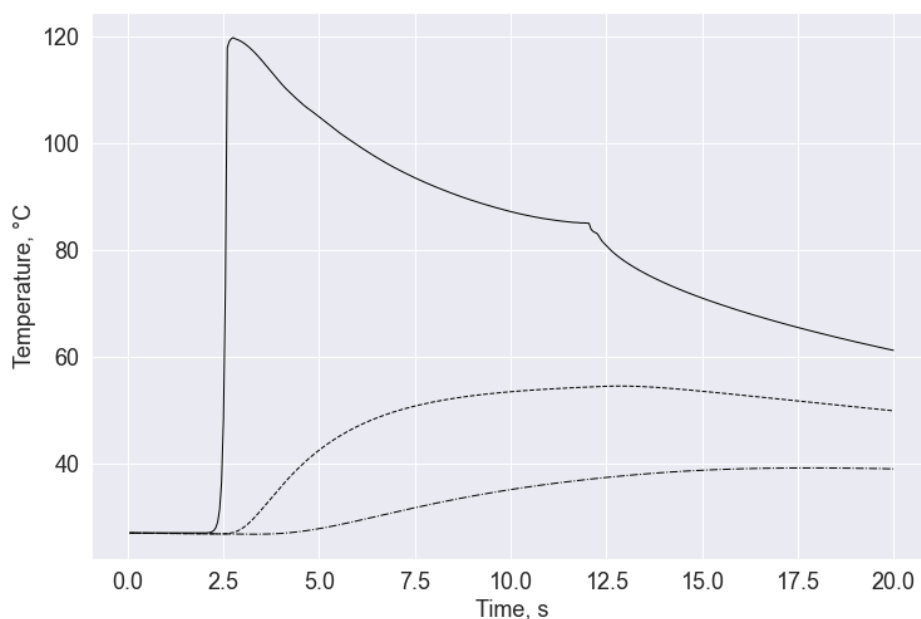


Рисунок 2 – Профили температуры в точках (1.5, 10) (сплошная), (2.5, 10) (штриховая) и (3.5, 10) (штрихпунктирная). Длина волны 1950 нм,  $(P_\phi, P_\theta) = (4.5 \text{ Вт}, 1.8 \text{ Вт})$

### Библиографический список

1. Van Ruijven, P. W. M. Optical-thermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins / P. W. M. van Ruijven, A. A. Poluektova, M. J. C. van Gemert, H. A. M. Neumann, T. Nijsten, C. W. M. van der Geld // *Lasers Med Sci.* – 2014. – V. 29 – P. 431–439. – DOI: 10.1007/s10103-013-1451-x.
2. Chebotarev, A. Y. Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer / A. Y. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* – 2017. – V. 51. – P. 2511–2519. – DOI: 10.1051/m2an/2017042.

### Благодарности

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-21-00087.

### Информация об авторах

**Пак Николай Михайлович** – аспирант 3-го года обучения, Дальневосточный Федеральный университет. E-mail: pak.nm@dvfu.ru.

**Ковтанюк Андрей Егорович** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор департамента МиКМ Дальневосточного федерального университета. E-mail: kovtanyuk.ae@dvfu.ru.

## ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К УЛУЧШЕНИЮ КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ В РЕНТГЕНОВСКОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ТОМОГРАФИИ

И. В. Прохоров, П. А. Ворновских, И. П. Яровенко

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** В докладе рассматриваются методы улучшения качества томографических изображений путем подавления рассеянной составляющей сигнала. Для этого используется экстраполяционная процедура на основе данных облучения исследуемого объекта серией ультракоротких импульсов. Сравниваются результаты применения экстраполяции данных в пространстве проекционных данных и в пространстве томографических изображений.

**Ключевые слова:** уравнение переноса излучения, задача томографии, экстраполяционные методы

## NUMERICAL SOLVING THE NON-STATIONARY RADIATION TRANSFER EQUATION USING GRAPHICS PROCESSING UNITS

I. V. Prokhorov, P. A. Vornovskikh, I. P. Yarovenko

*Institute of Applied mathematics FEB RAS, Vladivostok*

**Abstract.** The report considers methods to improve the quality of tomographic images by suppressing the scattered component of the signal. For this purpose, an extrapolation procedure based on the irradiation of the studied object by a series of ultrashort pulses is used. The results of data extrapolation in the space of projection data and in the space of tomographic images are compared.

**Key words:** radiation transfer equation, extrapolation methods, tomography problem

В современной медицине компьютерная томография (КТ) считается одним из наиболее информативных методов диагностики различных заболеваний и патологических состояний. Несмотря на значительные достижения в области КТ, задача улучшения качества и контрастности томографических изображений остается актуальной [1, 2].

Качество томографической реконструкции является результатом воздействия множества факторов, связанных как с физической природой процесса, так и с техническими особенностями оборудования и методов обработки томографических данных. Одним из ключевых направлений улучшения качества томографических изображений, является разработка методов подавления рассеянного излучения, которое представляет собой один из основных негативных факторов, влияющих на контрастность и точность томографических изображений. В настоящее время существует значительный объем работ, направленных на решение данной проблемы [1, 2].

В данной работе мы предлагаем экстраполяционный метод улучшения качества томографических изображений. Идеологически метод основан на оценке скорости убывания рассеивающей компоненты выходящего излучения при уменьшении длительности зондирующего импульса [3]. Явный вид формулы, позволяющей учитывать качественное поведение рассеянной компоненты решения уравнения переноса излучения в зависимости от длительности импульса дает возможность построения экстраполяционных формул, позволяющих выделить баллистическую компоненту томографического сигнала.

Отметим, что экстраполяционные методы длительное время используются в томографии с целью улучшения качества изображений. Однако, в основном применяются

алгоритмы экстраполяции, которые направлены на спектр изображения либо на решение задач томографии в условиях неполноты исходных данных [4, 5]. В отличие от предлагаемого нами подхода, данные методы, как правило, не учитывают природу и структурные особенности измеряемого сигнала.

В данной работе мы рассматриваем два варианта экстраполяции: в пространстве проекционных данных и в пространстве построенных томографических изображений. В первом случае мы экстраполируем данные в пространстве проекций, а затем обращаем преобразование Радона, чтобы получить "улучшенные" томографические изображения. Во втором случае мы экстраполируем данные непосредственно в пространстве изображений, используя уже построенные томограммы.

Мы сравниваем эффективность и точность обоих подходов на специально разработанном цифровом фантоме. Подобное сравнение представляет особый интерес ввиду того, что экстраполяция является потенциально неустойчивой процедурой, а обращение преобразования Радона, представляет собой условно корректную задачу чувствительную к ошибкам во входных данных. Таким образом, подход, основанный на экстраполяции в пространстве томографических изображений, может быть предпочтительнее. В докладе обсуждаются результаты данного сравнения и даются рекомендации по применению экстраполяционных методов для улучшения качества томографических изображений.

### **Библиографический список**

1. Withers, P. J. X-ray computed tomography / P. J. Withers, C. Bouman, S. Carmignato et al // Nat Rev Methods Primers. – 2021. – V. 18(1). – P. 71–78. – DOI: 10.1038/s43586-021-00015-4.
2. Computed Tomography: Fundamentals, System Technology, Image Quality, Applications / W. A. Kalender. – Erlangen Publicis, 2011.
3. Прохоров, И. В. Повышение качества томографических изображений при облучении среды импульсами различной длительности / И. В. Прохоров, И. П. Яровенко // Доклады РАН. Математика, информатика и процессы управления. – 2022. – Т. 505. – С. 71–78. – DOI: 10.31857/S2686954322040130.
4. Choi, J. K. Limited tomography reconstruction via tight frame and simultaneous sinogram extrapolation/ J. K., Choi, B. Dong, X. Zhang // Journal of Computational Mathematics – 2016. – С. 575–589. – DOI: 10.4208/jcm.1605-m2016-0535.
5. Gao, H. An Extrapolation Method for Image Reconstruction from a Straight-line Trajectory / H. Gao, L. Zhang, Z. Chen, Y. Xing, J. Cheng // 2006 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record. – 2006. – V.4. – P. 2304–2308. – DOI: 10.1109/NSSMIC.2006.354374.

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00378.

### **Информация об авторах**

**Прохоров Игорь Васильевич** – д-р. физ.-мат. наук, г.н.с., Институт прикладной математики ДВО РАН. E-mail: prokhorov@iam.dvo.ru.

**Ворновских Полина Андреевна** – м.н.с., Институт прикладной математики ДВО РАН. E-mail: vornovskikh.polina@gmail.com.

**Яровенко Иван Петрович** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт прикладной математики ДВО РАН. E-mail: yarovenko.ip@dvfu.ru.

## РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ПАТОЛОГИЙ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ ПО РЕНТГЕНОВСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ ГРУДНОЙ КЛЕТКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АУГМЕНТАЦИИ МЕТОДОМ ГЕНЕРАЦИИ ИСКУССТВЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**А. Г. Раджабов**

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,  
Минск*

**Аннотация.** Одной из важных проблем при решении задач автоматизации классификации медицинских изображений является сбор, подготовка данных и их анонимизация. В результате работы над базой изображений повышена производительность итогового алгоритма с 75 % до 98 % и обеспечена возможность замены реальных изображений сгенерированными.

**Ключевые слова:** глубокое обучение, внелегочные патологии, подготовка данных, предобученные нейронные сети, классификация

## DEVELOPMENT OF A DECISION SUPPORT SYSTEM FOR THE DIAGNOSTICS OF PATHOLOGIES OF THE CARDIOVASCULAR SYSTEM ON THE X-RAY IMAGES OF THE CHEST USING AUGMENTATION BY THE METHOD OF GENERATION OF ARTIFICIAL IMAGES

**A. G. Radzhabov**

*Joint Institute for Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk*

**Abstract.** One of the important problems in solving the problems of automating the classification of medical images is the collection, preparation of data and their anonymization. As a result of work on the image database, the performance of the final algorithm has been increased from 75 % to 98 % and it has been possible to replace real images with generated ones.

**Key words:** deep learning, extrapulmonary pathologies, data preparation, pretrained neural networks, classification

Программные средства, направленные на упрощение, ускорение и повышение качества медицинской диагностики уже являются неотъемлемой частью медицины. Появившиеся вычислительные и сетевые возможности позволяют обрабатывать большие объемы данные практически при любом масштабе внедрения технологий обработки изображений, в том числе – глубокого обучения. Заметные успехи, в последнее время, наблюдаются в сфере машинного зрения, как для автоматизации внутренних процессов медицинских учреждений, так и для обработки и обогащения медицинских данных [1]. Часто, взамен алгоритмам цифровой фильтрации и построения жестко запрограммированных моделей, применяются методы машинного обучения [2].

### **Подготовка данных**

В исследовании использовалась база рентгеновских изображений грудной клетки лаборатории анализа биомедицинских изображений ОИПИ НАН Беларуси, содержащая более 4 млн. рентгенограмм, аннотированных текстом врачами (наличие заболеваний, возраст, пол и другие полезные данные). Из нее были выделены два класса изображений:

- 1) здоровые – 44500 изображений
- 2) содержащие признак патологии (сосудистые корни легких) – 2826 изображений.

Также было сгенерировано 22250 искусственных изображений с помощью



диффузионной сети, обученной на классе «сосудистые корни легких», включающей 2261 изображение.

Таблица 1 – Список патологий с примерами изображений, количество изображений

Сгенерированные изображения	Класс изображений
	Без патологий
	Сосудистые корни легких

### Использованная нейронная сеть

Для достижения репрезентативного результата был использован фреймворк MONAI, предназначенный для работы с медицинскими данными. Предварительные эксперименты с неочищенной базой изображений показали результат точности на уровне 75 % [3].

Для экспериментов со сгенерированными наборами данных была выбрана открытая, предобученная на медицинских данных, вариация EfficientNet [4] – EfficientNetB0, которая давала стабильные, повторяемые результаты. Входное разрешение данной конфигурации EfficientNet составляет 224x224. Выбор был продиктован во многом ограниченностью сгенерированного набора данных, т.к. полученные изображения имеют разрешение 256x256.

### Вычислительные эксперименты

Производительность для соответствующих наборов данных, достигнутая в ходе экспериментов приведена в таблице 2, где AUC – площадь под ROC-кривой, accuracy – доля правильных ответов, precision – точность, recall – полнота, f1-score – среднее гармоническое precision и recall. Для precision, recall и f1-score приведены средневзвешенные значения.

Таблица 2 – Результаты вычислительных экспериментов

Наименование набора данных (сосудистые корни легких)	AUC	Accuracy	Precision	Recall	f1-score
Все оригинальные	0.98	0.93	0.94	0.94	0.94
Аугментация	0.98	0.93	0.93	0.93	0.93
Все сгенерированные	0.95	0.88	0.88	0.88	0.88

### Заключение

Общие показатели подтвердили улучшение качества набора данных и позволяет сосредоточиться на улучшении всего алгоритма классификации. Добавление сгенерированных изображений не сильно повлияло на итоговый результат. Была проверена возможность замены оригинальных изображений сгенерированными, что привело к незначительному снижению точности. Область аугментации и замены исходных данных сгенерированными выглядит перспективной и заслуживает дальнейших исследований.

В дальнейшем предполагается использовать более сложные подходы к генерации и предобучению генеративной модели, исследовать возможности построения сетей для обучения без учителя, параллельное обучение классификации и сегментации нескольких классов.

### Библиографический список

1. Компьютерные технологии в медико-биологических исследованиях Часть 1 : учебное пособие / В. Н. Канюков. – Оренбург: ГОУ ОРГ, 2009. – 109 с.
2. Computer-based medical consultations / E. H. Shorliffe. – New York: MYCIN, Elsevier scientific publishing company, 1976. – 263 p.

3. Radzhabov, A. Performance Analysis of Deep Learning Models for Heart Segmentation in Chest X-ray Images on a Small Dataset / A. Radzhabov, V. Kovalev // International Conference on Pattern Recognition and Information Processing. – 2021.

4. Tan, M. EfficientNet: Rethinking Model Scaling for Convolutional Neural Networks / M. Tan, Q. V. Le // arXiv. – 2020. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1905.11946.pdf> (дата обращения: 25.11.2021).

### **Благодарности**

Часть публикуемых результатов была получена благодаря исследованиям в рамках научно-исследовательской работы № Ф21УЗБГ-024 «Разработка алгоритмического и программного комплекса скрининга заболеваний сердца и сердечно-сосудистой системы на основе цифровых рентгеновских изображений грудной клетки с использованием современных методов искусственного интеллекта».

### **Информация об авторах**

**Раджабов Ахмедхан Гаджимаммаевич** – младший научный сотрудник Объединенного института проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск. E-mail: [ahmegxah@outlook.com](mailto:ahmegxah@outlook.com).

## ЭВОЛЮЦИОННАЯ ДИНАМИКА ДВУПОЛОЙ ПОПУЛЯЦИИ С НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ПОКОЛЕНИЯМИ

О. Л. Ревуцкая, Е. Я. Фрисман

*Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан*

**Аннотация.** Проведено исследование модели эволюционной динамики двуполой популяции с неперекрывающимися поколениями и плотностно зависимым лимитированием выживаемости особей. Обнаружено, что в параметрическом пространстве модели возникают области бистабильности и мультистабильности. Показано, что увеличение относительных приспособленностей генотипов приводит к дестабилизации численности популяции.

**Ключевые слова:** эколого-генетическая модель, половая структура, плотностно зависимое лимитирование, бистабильность, мультистабильность

## EVOLUTIONARY DYNAMICS OF A POPULATION WITH SEX STRUCTURE AND NON-OVERLAPPING GENERATIONS

O. L. Revutskaya, E. Ya. Frisman

*Institute for Complex Analysis of Regional Problems FEB RAS, Birobidzhan*

**Abstract.** We studied a model of the evolutionary dynamics of a population with a sex structure, non-overlapping generations, and a density-dependent regulation on the individuals survival. We found that there are bistability and multistability areas in the parametric space of the model. It was shown that an increase in the relative fitness of genotypes leads to a dynamics destabilization for the population size.

**Key words:** ecological genetic model, sex structure, density-dependent regulation, bistability, multistability

Настоящая работа посвящена исследованию эволюционной динамики двуполой популяции с сезонным характером размножения и неперекрывающимися поколениями. Будем полагать, что число новорожденных особей определяется численностью самок, а выживаемости самок и самцов линейно зависят от численности популяции. Предположим, что репродуктивный потенциал популяции определяется генетически. Динамика численности такой популяции может быть описана при помощи следующих уравнений

$$\begin{cases} F(n+1) = \delta \bar{r}(n) F(n) (1 - \beta_1 (F(n) + M(n))) \\ M(n+1) = (1 - \delta) \bar{r}(n) F(n) (1 - \beta_2 (F(n) + M(n))) \\ p_A(n+1) = p_A(n) (r_{AA} p_A(n) + r_{Aa} (1 - p_A(n))) / \bar{r}(n) \end{cases} \quad (1)$$

где  $n$  – номер периода размножения;  $F$  и  $M$  – численности самок и самцов;  $p_A$  – частота аллеля  $A$ ;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициенты, описывающие интенсивность внутривидовой конкуренции. Параметры  $r_{AA}$ ,  $r_{Aa}$  и  $r_{aa}$  характеризуют относительные приспособленности генотипов  $AA$ ,  $Aa$  и  $aa$  соответственно,  $\bar{r}(n) = r_{AA} (p_A(n))^2 + 2r_{Aa} p_A(n) (1 - p_A(n)) + r_{aa} (1 - p_A(n))^2$  – средняя приспособленность особей в  $n$  – году. Исследование системы (1) упрощается, если ввести новый параметр  $\rho = \beta_1 / \beta_2$ , характеризующий относительный вклад самок в лимитирование процесса выживаемости популяции.

Было проведено исследование структуры популяции в равновесном состоянии. Показано, что система (1) имеет три неподвижные точки с нулевой численностью самок и

самцов ( $E_0(0,0,0)$ ,  $E_1(0,0,1)$  и  $E_2(0,0,\bar{p})$ ), две мономорфные ненулевые по численности стационарные точки по аллелю  $a$  ( $E_3(\bar{f},\bar{m},0)$ ) и по аллелю  $A$  ( $E_4(\bar{f},\bar{m},1)$ ), а также одну полиморфную ( $E_5(\bar{f},\bar{m},\bar{p})$ ,  $0 < \bar{p} < 1$ ).

Области устойчивости мономорфных и полиморфных решений системы (1) с нулевой и ненулевой численностью самок и самцов представлены на рис. 1. Отметим, что в силу того, что решения модели (1) симметричны относительно  $r_{AA}$  и  $r_{aa}$ , картина динамического поведения системы на плоскости параметров  $(r_{AA}, r_{Aa})$  и  $(r_{aa}, r_{Aa})$  аналогична. Поэтому на одном рисунке изображены области устойчивости неподвижных точек как для плоскости параметров  $(r_{AA}, r_{Aa})$ , так и  $(r_{aa}, r_{Aa})$ , где относительные приспособленности гомозигот и неподвижные точки для плоскости  $(r_{aa}, r_{Aa})$  указаны в скобках (рис. 1).

Выявлено, что увеличение значений относительных приспособленностей генотипов приводит к дестабилизации численности популяции. При этом с ростом интенсивности экологического лимитирования  $\rho$  потеря устойчивости нетривиальных равновесий системы (1) может происходить, как по сценарию удвоения периода, так и по сценарию Неймарка-Сакера (рис. 1, 2 а, б). Следовательно, при изменении популяционных параметров численности самок и самцов могут демонстрировать колебания (периодические или квазипериодические). Одновременно с этим, генетический состав будет оставаться постоянным и соответствовать либо мономорфизму, либо полиморфизму в зависимости от соотношения относительных приспособленностей гетерозиготы ( $r_{Aa}$ ) и гомозигот ( $r_{AA}$  и  $r_{aa}$ ).

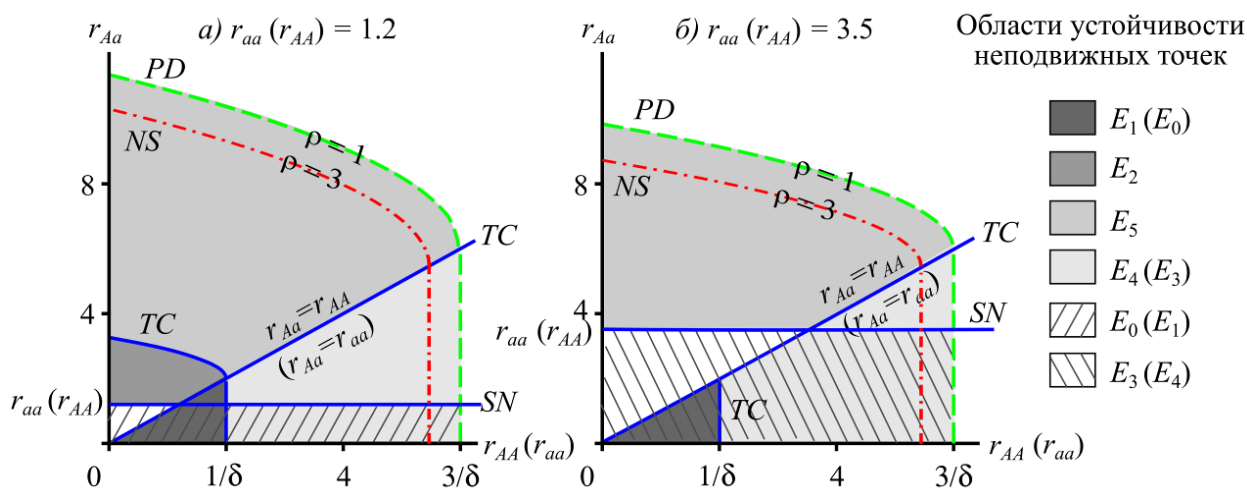


Рисунок 1 – Области устойчивости мономорфных и полиморфных решений системы (1) на плоскости параметров  $(r_{AA}, r_{Aa})$  или  $(r_{aa}, r_{Aa})$  (указано в скобках) при  $\delta = 0.5$ . TC, SN, NS, PD – линии бифуркации транскритической, седло-узловой, Неймарка-Сакера и удвоения периода соответственно

Показано, что при повышенной приспособленности гетерозиготы  $r_{Aa}$  система (1) демонстрирует устойчивый полиморфизм (область устойчивости равновесия  $E_5$  на рис. 1).

При промежуточном доминировании приспособленности гетерозиготы  $r_{Aa}$  динамика системы демонстрирует переходящий полиморфизм до мономорфизма по аллелям, обеспечивающим большую приспособленность (рис. 2 а).

При пониженной приспособленности гетерозиготы  $r_{Aa}$  наблюдается бистабильность мономорфных равновесий, когда одно мономорфное равновесие с нулевой численностью самок и самцов, а другое – с ненулевой, т.е.  $E_0$  и  $E_4$  или  $E_1$  и  $E_3$  (рис. 1).

Кроме того, отмечается бистабильность мономорфных неподвижных точек только с

нулевой ( $E_0$  и  $E_1$ ) (рис. 1 а) или ненулевой ( $E_3$  и  $E_4$ ) (рис. 1 б, 2 б) численностью полов. В последнем случае область устойчивости мономорфного решения по аллелю  $a$  ( $E_3$ ) накладывается на область устойчивости решения мономорфного решения по аллелю  $A$  ( $E_4$ ) на плоскости параметров  $(\rho, r_{AA})$  (и наоборот в случае рассмотрения областей устойчивости равновесий на плоскости  $(\rho, r_{aa})$ ) (рис. 2 б). Какое именно из мономорфных решений ( $E_3$  или  $E_4$ ) будет достигнуто, определяется начальными значениями численности полов и частоты аллеля  $A$  (рис. 2 в).

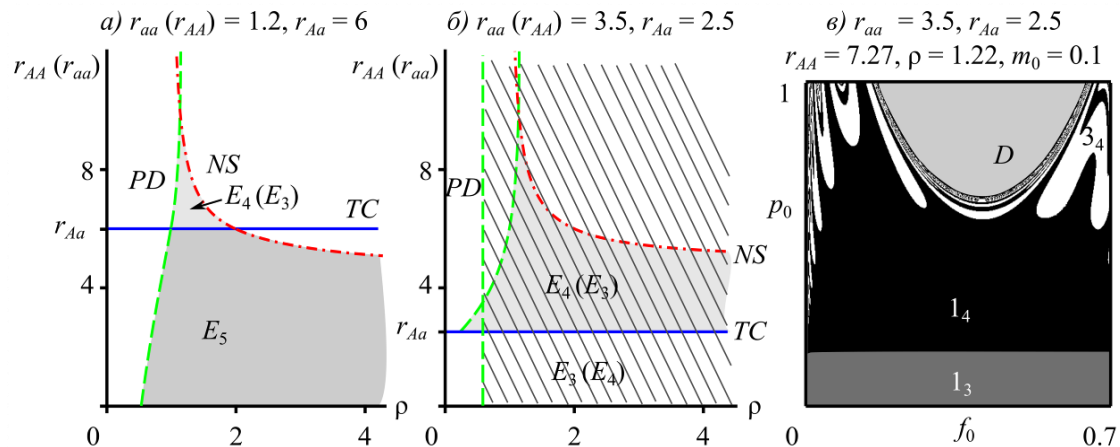


Рисунок 2 – а, б) Области устойчивости мономорфных ( $E_3$  и  $E_4$ ) и полиморфного ( $E_5$ ) решений на плоскости параметров  $(\rho, r_{AA})$  или  $(\rho, r_{aa})$  (указано в скобках) при  $\delta = 0.5$ . в) Бассейны притяжения динамических режимов модели (1). Числа соответствуют длине наблюдаемого цикла. Индекс 3 указывает, что популяция мономорфна по аллелю  $a$ , 4 – мономорфна по аллелю  $A$ , 5 – полиморфна.  $D$  – область недопустимых значений

Кроме бистабильности мономорфных равновесий, в параметрическом пространстве модели (1) возникают области мультистабильности. В частности, на рис. 2 в помимо сосуществования двух мономорфных равновесий, продемонстрировано одновременное существование равновесной динамики численности самок и самцов и колебаний с периодом 3 в случае мономорфизма по аллелю  $A$ . Следовательно, даже небольшая вариация текущей численности полов и частоты аллеля  $A$  усложняет динамику популяции и может привести к смене наблюдаемого динамического режима и генетического состава популяции.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.

### Информация об авторах

**Ревуцкая Оксана Леонидовна** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с. ИКАРП ДВО РАН. E-mail: oksana-rev@mail.ru.

**Фрисман Ефим Яковлевич** – чл.-кор. РАН, докт. биол. наук, профессор, гл.н.с. ИКАРП ДВО РАН. E-mail: frisman@mail.ru.

## ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАСКИРОВКИ ДЛЯ 2D МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

П. А. Савинов<sup>1</sup>, К. Е. Бахтин<sup>1,2</sup>, У. Ш. Киличев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

<sup>2</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

**Аннотация.** Рассматриваются задачи проектирования многослойных экранирующих или маскировочных оболочек для 2D модели электропроводности. Предполагается, что эти оболочки состоят из конечного числа кольцевых слоев, заполненных изотропными средами. С использованием оптимизационного метода рассматриваемые задачи сводятся к экстремальным задачам, исследуются их свойства и развивается эффективный численный алгоритм, основанный на улучшенной версии метода роя частиц (МРЧ). Обсуждаются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** электропроводность, оптимизационный метод, обратные задачи, маскировка, многослойная оболочка, оптимизированный метод роя частиц

## OPTIMIZATION METHOD IN 2D DC ELECTRIC FIELD CLOAKING AND SHIELDING

P. A. Savinov<sup>1</sup>, K. E. Bakhtin<sup>1,2</sup>, U. Sh. Kilichev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok

<sup>2</sup>Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Abstract.** The problems of designing multilayer shielding or cloaking shells for a 2D model of electrical conductivity are considered. It is assumed that these shells consist of a finite number of annular layers filled with isotropic media. Using the optimization method, the problems under consideration are reduced to extremal problems, their properties are studied, and an efficient numerical algorithm based on an improved version of the particle swarm method (PSO) is developed. The results of the performed computational experiments are discussed.

**Key words:** electrical conductivity, optimization method, inverse problems, cloaking, multilayer shell, particle swarm optimization method

В последнее десятилетие наблюдается растущий интерес в развитии технологий дизайна устройств невидимости (в виде маскировочных оболочек), служащих для маскировки материальных тел от обнаружения их различными средствами локации. Начиная с работ [1, 2], большое количество публикаций посвящено развитию различных схем и стратегий маскировки материальных тел. В первых работах в этой области исследовалась электромагнитная маскировка, т. е. маскировка объектов от обнаружения их средствами электромагнитной локации. Затем основные результаты из теории электромагнитной маскировки были перенесены на случаи акустической маскировки и маскировки от статических тепловых, электрических и магнитных полей.

Следует, однако, отметить, что техническая реализация решений, полученных в указанных работах, связана с существенными трудностями [1]. Поэтому в последние годы для решения задач маскировки стали применять оптимизационные методы. Оптимизационный метод (см. [3]) применяется и в настоящей работе для решения задачи маскировки для 2D модели электропроводности.

Мы начнем с постановки прямой задачи электропроводности, рассматриваемой в прямоугольнике  $D = \{ \mathbf{x} \equiv (x, y) : |x| < x_0, |y| < y_0 \}$ . Будем считать, что внешний электрический

потенциал  $U^e$  создается двумя вертикальными пластинами  $x = \pm x_0$ , которые поддерживаются при разных значениях  $u_1$  и  $u_2$ , а верхняя и нижняя пластины  $y = \pm y_0$  электрически изолированы. Мы предполагаем, что внутри  $D$  имеется материальная оболочка  $(\Omega, \sigma)$ . Здесь  $\Omega$  – кольцо  $a < |\mathbf{x}| < b < \max\{x_0, y_0\}$  и  $\sigma$  – тензор электропроводности неоднородной анизотропной среды, заполняющей область  $\Omega$ . Мы предполагаем также, что внутренность  $\Omega_i : |\mathbf{x}| < a$  и внешность  $\Omega_e : |\mathbf{x}| > b$  области  $\Omega$  заполнены одной и той же однородной средой с постоянной электропроводностью  $\sigma_b > 0$  (см. рис. 1).

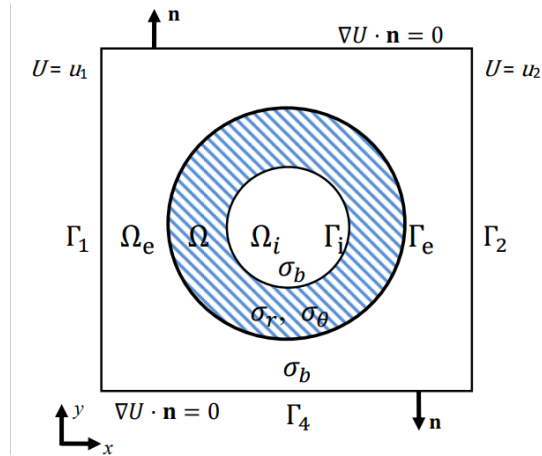


Рисунок 1 – В этом случае прямая задача электропроводности состоит в нахождении тройки функций  $U = (u_i, u, u_e)$ , а именно:  $u_i$  в  $\Omega_i$ ,  $u$  в  $\Omega$  и  $u_e$  в  $\Omega_e$ , удовлетворяющих уравнениям:

$$\sigma_b \Delta u_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \sigma_b \Delta u_e = 0 \text{ в } \Omega_e, \quad \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}(u)) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

следующим граничным условиям на границе  $\partial D$  области  $D$ :

$$u_e|_{x=-x_0} = u_1, \quad u_e|_{x=x_0} = u_2, \quad \partial u_e / \partial y|_{y=\pm y_0} = 0 \quad (2)$$

и условиям сопряжения на внутренней  $\Gamma_i$  и внешней  $\Gamma_e$  компонентах границы  $\Gamma$  оболочки  $\Omega$ , имеющим вид:

$$u_i = u, \quad \sigma_b \frac{\partial u_i}{\partial n} = (\sigma \nabla u) \cdot n \text{ на } \Gamma_i, \quad u_e = u, \quad \sigma_b \frac{\partial u_e}{\partial n} = (\sigma \nabla u) \cdot n \text{ на } \Gamma_e. \quad (3)$$

Нашей целью является решение обратных задач для модели (1)-(3), связанных с проектированием экранирующих или маскирующих оболочек. В общем случае обратные задачи состоят в нахождении проводимости  $\sigma$  среды, заполняющей  $\Omega$ , из двух независимых условий:

$$\nabla U = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad U = U^e \text{ в } \Omega_e. \quad (4)$$

Здесь  $U = (u_i, u, u_e)$  – решение задачи (1)-(3). В случае, когда  $\sigma$  определяется исключительно из первого (или второго) условия в (4), мы будем называть соответствующую обратную задачу задачей экранирования (или внешней маскировки).

Ниже мы рассмотрим важный частный случай, когда оболочка  $(\Omega, \sigma)$  состоит из  $M$  концентрических цилиндрических слоев  $\Omega_j = \{r_{j-1} < r = |\mathbf{x}| < r_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , где  $r_0 = a$ ,  $r_M = b$ . Каждый из этих слоев заполнен однородной изотропной средой, описываемой постоянной проводимостью  $\sigma_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Проводимость  $\sigma$  в этом случае есть скалярная кусочно-постоянная функция, принимающая значение  $\sigma_j$  в интервале  $(\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ . В результате наши обратные задачи сводятся к нахождению неизвестных проводимостей  $\sigma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , образующих  $M$ -мерный вектор проводимостей  $s = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$  из условий маскировки (4).

Для нахождения вектора  $s = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$  мы применим оптимизационный метод. Сущность его состоит во введении специального функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче, и последующей замене исходной обратной задачи задачей нахождения его условного экстремума (см. детали в [4-7]). В результате обратная задача сводится к решению многопараметрической экстремальной задачи. В качестве искоемых управлений выбираются неизвестные параметры среды  $\sigma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , которые изменяются в некотором интервале  $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ .

В качестве минимизируемого функционала качества выбирается неотрицательный квадратичный функционал  $J$ , который связан с эффективностью маскировочной оболочки, отвечающей оптимальному решению, обратной зависимостью. Для нахождения оптимального решения используется модифицированный метод роя частиц (см. [8]).

При выполнении указанных правил показывается, что найденное с помощью разработанного алгоритма оптимальное решение обладает высокой маскировочной эффективностью, которая тем выше, чем больше отношение  $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ , называемое контрастом. Если, к тому же, нижняя и верхняя границы  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  выбираются так, что они соответствуют проводимостям определенных природных материалов, то полученное оптимальное решение допускает простую реализацию на практике.

### Библиографический список

1. Pendry, J. B. Controlling electromagnetic fields / J. B. Pendry, D. Shurig, D. R. Smith // Science. – 2006. – V. 312. – P. 1780–1782. – DOI: 10.1126/science.1125907.
2. Alu, A. Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings / A. Alu, N. Engheta // Phys. Rev. E. – 2005. – V. 72. – P. 016623.
3. Solutions of Ill-Posed Problems, 1 st ed. / A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenyev. – Winston: New York, USA, 1977.
4. Alekseev, G. V. Optimization analysis of electrostatic cloaking problems / G. V. Alekseev, A. V. Lobanov // J. Appl. Ind. Math. – 2020. – V.14. – P. 599–609.
5. Alekseev, G. V. Optimization-based numerical analysis of three-dimensional magnetic cloaking problems / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak // Comp. Math. Math. Phys. – 2021. – V. 61. – P. 212–225.
6. Invisibility Problem in Acoustics, Optics and Heat Transfer / G. V. Alekseev. – Dalnauka: Vladivostok, Russia, 2016.
7. Analysis and Optimization in Designing Invisibility Devices for Material Bodies / G. V. Alekseev, V. A. Levin, D. A. Tereshko. – FIZMATLIT: Moscow, Russian, 2021. (In Russian).
8. Poli, R. Particle swarm optimization: an overview / R. Poli, J. Kennedy, T. Blackwell // Swarm Intell. – 2007. – V. 1. – P. 33–57.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-21-00271.

### Информация об авторах

**Савинов Павел Алексеевич** – аспирант 4-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: savinov\_pa@dvfu.ru.

**Бахтин Кирилл Евгеньевич** – магистрант 1-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: bakhtin.ke@dvfu.ru.

**Киличов Улмасжон Шухратович** – аспирант 2-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: kilichov.us@dvfu.ru.



## МУЛЬТФРАКТАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ЛЁГКИХ

В. О. Салмиянов<sup>1</sup>, А. Г. Масловская<sup>1</sup>, А. В. Ильин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Амурский государственный университет, Благовещенск

<sup>2</sup>Дальневосточный научный центр физиологии и патологии дыхания, Благовещенск

**Аннотация.** Работа посвящена оценке мультифрактальных характеристик цифровых изображений лёгких человека по данным компьютерной томографии. Алгоритм метода мультифрактальной параметризации реализован в виде прикладной программы в ППП Matlab. Описаны данные тестовой диагностики мультифрактальных спектров для КТ-изображений лёгких, соответствующих норме и патологии.

**Ключевые слова:** компьютерная томография легких, растровое изображение, фрактальный анализ, мультифрактальная параметризация, спектр Реньи

## MULTIFRACTAL PARAMETERIZATION OF RASTER IMAGES OF LUNG COMPUTED TOMOGRAPHY

V. O. Salmiyanov<sup>1</sup>, A. G. Maslovskaya<sup>1</sup>, A. V. Ilyin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Amur State University, Blagoveshchensk

<sup>2</sup>Far Eastern Scientific Center of Physiology and Pathology of Respiration, Blagoveshchensk

**Abstract.** The paper is devoted to the evaluation of multifractal characteristics for digital images of human lungs according to computed tomography data. The algorithm of the multifractal parametrization method is implemented as an application program in the Matlab. The data of test diagnostics of multifractal spectra for CT images of the lungs corresponding to the norm and pathology are described.

**Key words:** lung computed tomography, raster image, fractal analysis, multifractal parametrization, Renyi spectrum

Синергетика и теория самоорганизации находят широкое применение для анализа нерегулярных объектов в биологии и медицине. Как известно, многие системы человеческого организма имеют самоподобную архитектуру, приобретенную в процессе эволюции. Так, геометрические конфигурации лёгких человека характеризуются ветвистым фрактальным строением с различным уровнем сегментарных и подсегментарных частей. Методы фрактального анализа используют как инструмент для количественной оценки степени сложности, неоднородности и шероховатости. Модифицированный подход дает метод мультифрактального анализа, в основе которых лежит определение масштабных характеристик объекта с помощью целого спектра фрактальных размерностей [1].

В медицинском аспекте методы интеллектуального анализа цифровых изображений применяются для установления неявных изменений с целью ранней диагностики различных патологий. Средства, предоставляемые аппаратом фрактального и мультифрактального анализа, также нашли применение для задач характеристики, идентификации и классификации изображений медицинских объектов [2]. Несмотря на наличие значительного числа научных работ, на сегодняшний день отсутствует полномасштабное и законченное представление об использовании фрактального формализма для характеристики биомедицинских объектов. Это обусловлено большой вариативностью методов, а также необходимостью проведения достаточно субъективной процедуры предпроцессинговой обработки оцифрованного изоб-

ражения (выделение участков интереса, настройка контраста, выделение уровней градации серого, использование фильтров и вейвлет-преобразований и др.) [3].

Настоящее исследование предпринято с целью поиска чувствительных методик для выявления морфологических особенностей строения человеческих легких на основе методов фрактального и мультифрактального анализа. Объектом исследования являются снимки компьютерной томографии лёгких (прямая проекция), соответствующих норме и патологии.

Основанием для классического фрактального метода «box-counting» является процедура многократного разбиения растрового изображения на  $2^{2n}$  кластеров. При каждом фиксированном размере кластера  $R_0$  для очередной итерации производится подсчет количества кластеров  $N$ , содержащих хотя бы одну точку разбиения, затем процедура повторяется с измельчением кластерной сетки. В завершении в двойном логарифмическом масштабе строится зависимость количества непустых кластеров от размера разбиения. Угловым коэффициентом прямолинейной аппроксимации дает значения фрактальной размерности  $D$ :  $\ln N = -D \ln R_0$  [1]. Существует два направления применения этой формулы – оценка фрактальной размерности всей структуры ( $D_{image}$ ) и границ фрактальных кластеров ( $D_{bound}$ ).

Метод мультифрактальной параметризации учитывает не только степень заполненности изображения, но и удельный вес кластера и дает спектр фрактальных размерностей [1]. Алгоритм состоит из последовательности шагов. 1. Изображение покрывается сеткой с линейным размером кластера  $l$ . 2. Создается матрица  $C$ , в которой каждый элемент матрицы  $C_{i,j}$  содержит в себе количество закрасенных точек в кластере, такое, что изображение, состоящее из  $N \times N$  точек, имеет в кластере  $(i, j)$ ,  $i, j = \overline{1, k}$ ,  $k = N/l$ , определенное количество точек. 3. Вычисление удельного веса кластера  $P_{i,j} = C_{i,j} / \sum_{i,j} C_{i,j}$ , где  $\sum_{i,j} C_{i,j}$  – общее число

единиц в матрице кластеров. 4. Характеристика  $P_{ij}$  изменяется по степенному закону в зависимости от  $l$  и определяется последовательностью показателей  $\tau(q)$ , характеризующих меру. Вариация параметра деформации  $q$  дает значение взвешенного числа клеток

$N(q, l) = \sum_{i,j=1}^k P_{i,j}^q \propto l^{-\tau(q)}$  и скейлинговой экспоненты  $\tau(q) = -\lim_{l \rightarrow 0} (\ln N(q, l) / \ln l)$ . 5. Обобщенный спектр Реньи задается соотношением:  $D(q) = \tau(q) / (q - 1)$ .

Алгоритмы фрактальной и мультифрактальной параметризации реализованы в виде прикладных программ в ППП Matlab. Верификация результатов проводилась на тестовых объектах – искусственно-сгенерированных фракталах с известной размерностью. Предпроцессорная подготовка изображений заключалась в загрузке растрового изображения и бинаризации с помощью установленного диапазона яркости.

Для вычислительных экспериментов было выбрано два снимка компьютерной томографии лёгких, соответствующих норме и патологии. Фрактальный анализ, проведенный по границам фрактальных кластеров, дает значения:  $D_{bound}=1.33$  – норма,  $D_{bound}=1.38$  – для изображения, соответствующего установленной патологии. Фрактальная размерность, вычисленная для всей структуры, соответственно равна  $D_{image}=1.65$  (норма) и  $D_{image}=1.69$  (патология). Анализ по 4 выделенным секторам на данных изображениях дает  $D_{image} \in [1.64-1.68]$  (норма),  $D_{image} \in [1.64-1.72]$  (патология). Ожидаемым оказался результат: сектор, соответствующий участку, пораженному пневмонией, дал несколько большее значение фрактальной размерности:  $D_{image}=1.72$ . В целом, можно заключить, что классический метод «box-counting» не являются особенно чувствительной методикой для диагностики особенностей.

Применение метода мультифрактальной параметризации дает следующие результаты. На рис. 1 показан спектр размерностей Реньи для анализируемых КТ-изображений легких. Спектр характеризуется уширением для КТ-изображения структуры, соответствующей норме. Здесь мы можем наблюдать достаточно широкий спектр размерностей  $D \in [1.3-1.7]$ . Такое поведение спектра в большей степени соответствует мультифрактальной организации мно-

жества. Для изображения легкого с диагностированной патологией спектр Реньи показал суженный диапазон размерностей  $D \in [1.6-1.8]$ , что говорит о тенденции к монофрактальной организации. Значения  $D_0$  коррелируют с данными фрактального анализа и составляют  $D_0=1.63$  и  $D_0=1.68$  для нормы и патологии соответственно.

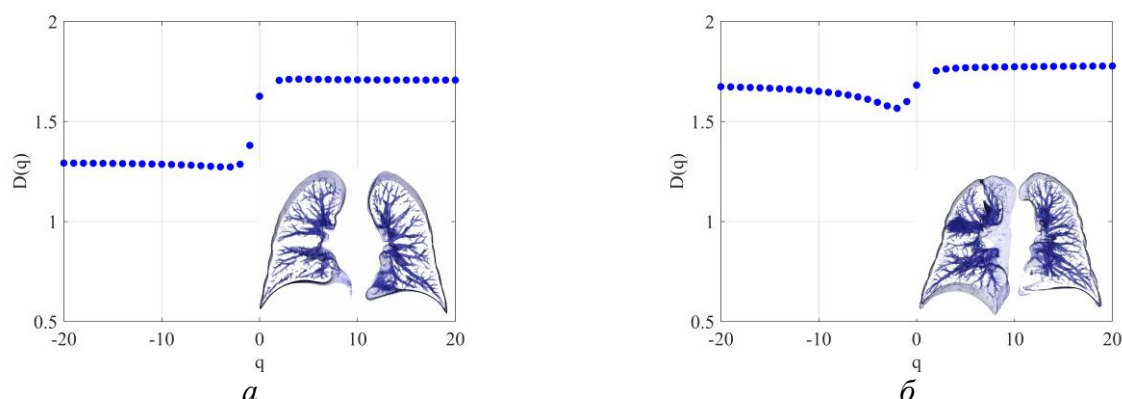


Рисунок 1 – Спектры Реньи для КТ-изображений: (а) – норма, (б) – патология

Оценка скейлинговых характеристик КТ-изображений легких методом мультифрактальной параметризации показывает наличие определенной чувствительности к диагностике особенностей морфологии легких. Развитие данной тематики требует исследования возможностей альтернативных мультифрактальных методов, например, метода максимумов моделей коэффициентов вейвлет-преобразований [4], а также проведения статистического анализа результатов на репрезентативной выборке растровых изображений КТ-снимков легких.

### Библиографический список

1. Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с. – ISBN: 5-93972-060-9.
2. Troshin, P. I. Multifractal parametrization in diagnosis of lungs diseases / P. I. Troshin // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2015. – V. 105. – № 2. – P. 173–185.
3. Sztajn, I. Image processing in biology based on the fractal analysis / I. Sztajn, A. D. Crisan, C. P. Mina, V. Voinea // [Электронный ресурс] Image Processing. – 01.12.2009. – Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.5772/705>.
4. Масловская, А. Г. Алгоритмы мультифрактального вейвлет-анализа в задачах спецификации растровых изображений самоподобных структур / А. Г. Масловская, Л. С. Афанасов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – Т. 53. – С. 61–70.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 122082400001-8.

### Информация об авторах

**Салмиянов Владислав Олегович** – аспирант, млад. науч. сотр. лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем Амурского государственного университета. E-mail: [svsalmiyanov@mail.ru](mailto:svsalmiyanov@mail.ru).

**Масловская Анна Геннадьевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: [maslovskayaag@mail.ru](mailto:maslovskayaag@mail.ru).

**Ильин Андрей Валерьевич** – канд. мед. наук, зав. отделением лучевой диагностики, врач-рентгенолог, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Дальневосточный научный центр физиологии и патологии дыхания». E-mail: [alero82@yandex.ru](mailto:alero82@yandex.ru).

## ВАРИАЦИЯ РЕШЕТОК КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РОСТА БИОПЛЕНОК В УСЛОВИЯХ ЛИМИТИРОВАНИЯ ПО СУБСТРАТУ

С. К. Саруханян, А. Г. Масловская

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** В работе представлен результат разработки двумерной клеточно-автоматной модели роста бактериальной пленки в условиях ограниченного питания. Алгоритм 2D модель реализован на языке программирования C# в среде Unity Engine с использованием ортогональной и гексагональной решеток. Рассмотрены модели с избыточным и дефицитным начальным уровнем питания.

**Ключевые слова:** бактериальный рост, биопленка, клеточный автомат, решетка, ограниченное питание

## VARIATION OF CELLULAR AUTOMATON LATTICES FOR MODELING GROWTH OF BIOFILMS UNDER SUBSTRATE-LIMITED CONDITIONS

S. K. Sarukhanian, A. G. Maslovskaya

Amur State University, Blagoveshchensk

**Abstract.** The paper is devoted to the development of a two-dimensional cellular automaton model of bacterial biofilm growth under substrate-limited conditions. The algorithm for 2D model is implemented in C# and the Unity Engine with the use of orthogonal and hexagonal lattices. Models with excessive and deficient initial levels of nutrition are considered.

**Key words:** bacterial growth, biofilm, cellular automaton, lattice, limited nutrition

Кроме того, бактериальные пленки представляют собой уникальную экосистему, в которой микроорганизмы взаимодействуют друг с другом и с окружающей средой. Изучение биопленок помогает понять, как микроорганизмы сотрудничают и конкурируют друг с другом, как адаптируются к изменениям окружающей среды и как влияют на качество воды, почвы и других экосистем. Бактериальные пленки могут образовываться на поверхностях различных материалов, включая медицинские имплантаты и трубопроводы, и могут стать серьезной клинической проблемой, вызывая госпитальные инфекции и формируя резистентность к антимикробным препаратам. Моделирование эволюции микроорганизмов является важным инструментом для изучения многих вопросов в биологии и медицине. Моделирование биопленок позволяет исследовать механизмы образования и функционирования плотных структур, а также разрабатывать стратегии для контроля и уничтожения. Выделяют два основных подхода к моделированию биопленок: дискретный, при котором используют алгоритмы на основе ячеек или агентов (для учета микроскопических процессов внутри биопленок), и непрерывный, основанный на применении аппарата дифференциальных уравнений для описания макроскопических свойств биопленок.

В последнее время, дискретный подход в моделировании эволюции микросистем набирает все большую популярность благодаря развитию информационных технологий и росту производительности ЭВМ. В частности, методы клеточно-автоматного моделирования становятся особенно актуальными [1–3]. Выбор типа сетки для клеточного автомата зависит от конкретных требований к модели. В 3D случае часто ограничиваются простой ортогональной решеткой или используют кубические решетки, для которых рассматривается

соседство с учетом диагональных элементов. Реже используют алгоритмически более сложные решетки других элементов, в частности, усеченных октаэдров. В данном аспекте возникает вопрос целесообразности применения усложненных или упрощенных решеток в зависимости от области применения. Цель настоящей работы заключалась в разработке и реализации 2D клеточно-автоматной модели роста бактериальной пленки в условиях ограниченного питания с использованием различных геометрических решеток.

Клеточно-автоматный алгоритм роста биопленки базируется на дискретном представлении уравнения, описывающего диффузионный рост биомассы с учетом потребления питания:

$$C_S[i, j, k, t+1] = C_S + D_S \left( \sum_{n=1}^{Nbrs_{count}} C_S[n_i, n_j, n_k, t] - Nbrs_{count} \cdot C_S[i, j, k, t] \right), \quad (1)$$

где  $C_S$  – концентрация питательного вещества;  $D_S$  – коэффициент диффузии питательного вещества;  $Nbrs_{count}$  – число соседей для ячейки;  $t$  – текущий момент времени, соответствующий номеру итерации;  $p$  – функция поглощения питательного вещества, определяемая как:

$$p[i, j, k, t] = \mu_{\max} \cdot C_X[i, j, k, t] \cdot \frac{C_S[i, j, k, t]}{C_S[i, j, k, t] + K_S}, \quad (2)$$

где  $\mu_{\max}$  – максимальная скорость поглощения вещества бактерией;  $C_S$  – концентрация нутриента;  $C_X$  – концентрация бактерий;  $K_S$  – пороговая константа роста бактерии.

$$C_X[i, j, k, t+1] = C_X[i, j, k, t] + p[i, j, k, t], \quad C_S[i, j, k, t+1] = C_S[i, j, k, t] - p[i, j, k, t]. \quad (3)$$

В начальный момент времени происходит инициализация входных параметров модели и генерация решетки автомата. На этом этапе задаются значения нутриента  $C_{Init}$  в каждой ячейке сетки. Далее происходит посев бактериальных клеток, в процессе которого некоторые случайно выбранные ячейки на нижнем уровне сетки заполняются биомассой с начальной концентрацией  $C_{X,init}$ . Главный цикл алгоритма включает моделирование процесса диффузии для каждой ячейки и расчет величины поглощаемого нутриента клеткой. После чего концентрация биомассы в рассматриваемой ячейке увеличивается на эту величину, в то время как значение нутриента уменьшается на эту же величину. Параметры модели, использованные для симуляции, представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Параметры модели

Параметр	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Высота области	$H$	180	мкм
Ширина области	$W$	320	мкм
Начальная концентрация питательного вещества	$C_{Init}$	35	кг/м <sup>3</sup>
Начальное число клеток в области	$n_0$	250	-
Концентрация биомассы в начальных ячейках	$C_{X,init}$	0.3	-
Максимальная удельная скорость роста	$\mu_{\max}$	$1.52 \cdot 10^{-5}$	с <sup>-1</sup>
Пороговая константа роста Моно	$K_S$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	кг/м <sup>3</sup>
Максимальная концентрация биомассы	$C_{Xm}$	70	кг/м <sup>3</sup>
Коэффициент диффузии	$D_S$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	м <sup>2</sup> /с

Пример компьютерного моделирования последовательных стадий эволюции биопленки при низком уровне питания  $C_{init}=35$  представлен на рис. 1. Для симуляции использованы ортогональная и гексагональная решетки.

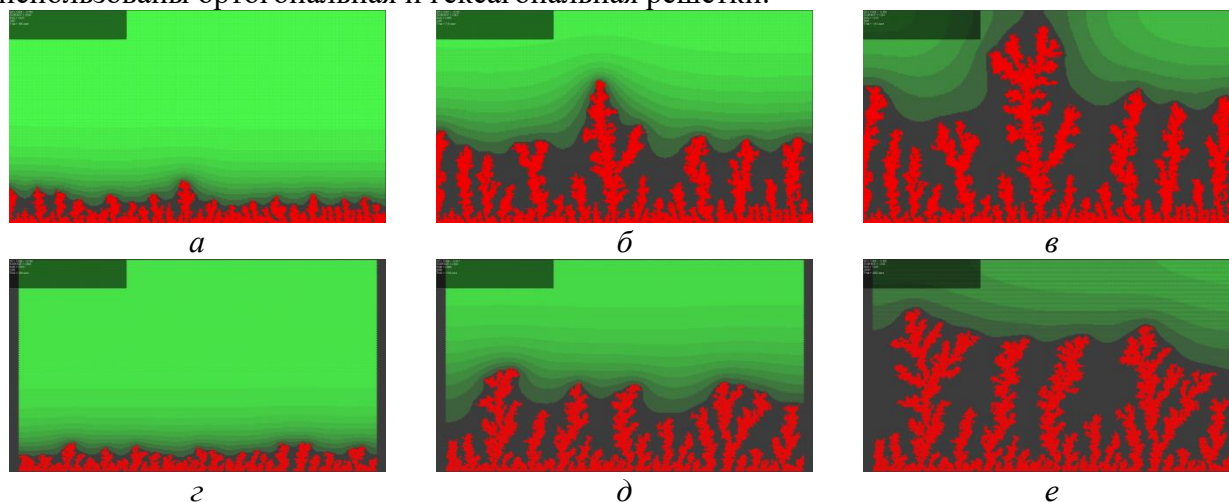


Рисунок 1 – Симуляция роста бактериальной пленки с использованием квадратной (*а*), (*б*), (*в*) и гексагональной (*г*), (*д*), (*е*) решеток

Можно отметить, что имеют место два фактора, отвечающие за быстрое действие работы вычислительного алгоритма. С одной стороны, алгоритмическая сложность реализации модели на основе ортогональной решетки невысока по сравнению с алгоритмом для гексагональной решетки. Вместе с тем ортогональная решетка требует реализации модели с большой размерностью сетки для достижения точности аппроксимации, соответствующей гексагональной решетке, что, в свою очередь, приводит к увеличению объема вычислений. Выявлено, что условия ограниченного питания значительно замедляют рост биопленки и заставляют ее при достижении дефицита питательного вещества принимать более сложные геометрические конфигурации, соответствующие дендритоподобным структурам. При этом периметр границы увеличивается, обеспечивая достаточную для всей бактериальной колонии скорость поглощения питательного вещества.

### Библиографический список

1. Picioreanu, C. Mathematical modelling of biofilm structure with a hybrid differential-discrete cellular automaton approach / C. Picioreanu, M. C. M. van Loosdrecht, J. J. Heijnen // *Biotechnology and Bioengineering*. – 1998. – V. 58(1). – DOI: 10.1002/(SICI)1097-0290(19980405)58:1<101::AID-BIT11>3.0.CO;2-J.
2. Rodriguez, D. A cellular automata model for biofilm growth / D. Rodriguez, A. Carpio, B. Einarsson. 10th World Congress on Computational Mechanics, Blucher Mechanical Engineering Proceedings. – 2014. V. 1. – P. 409–421.
3. Саруханян, С. К. Простейший клеточный автомат для моделирования поверхностного роста бактерий / С. К. Саруханян, А. Г. Масловская // *Вестник АмГУ. Серия «Естественные и экономические науки»*. – 2022. – Вып. 99. – С. 15–22.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

### Информация об авторах

**Саруханян Самвел Каджикович** – аспирант 1-го года обучения, Амурский государственный университет. E-mail: saruhanyans@gmail.com.

**Масловская Анна Геннадьевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: maslovskayaag@mail.ru.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА КИСЛОРОДА В МОЗГЕ

Т. Э. Селезнев, А. Е. Ковтанюк

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** Проведен анализ оптимизационного алгоритма решения обратной задачи для модели переноса кислорода в мозге. Представлена теорема о разрешимости задачи оптимального управления, построена система оптимальности.

**Ключевые слова:** модель переноса кислорода в головном мозге, система оптимальности, метод конечных элементов

## INVERSE PROBLEM FOR A MODEL OF CEREBRAL OXYGEN TRANSPORT

T. E. Seleznev, A. E. Kovtanyuk

*Far Eastern Federal University, Vladivostok*

**Abstract.** The analysis of an optimization algorithm for solving an inverse problem for the cerebral oxygen transport model is carried out. A theorem on the solvability of the optimal control problem is presented, an optimality system is constructed.

**Key words:** cerebral oxygen transport model, optimization system, finite elements method

Математическое моделирование переноса кислорода в головном мозге играет важную роль при прогнозировании различных опасных ситуаций, вызванных нарушением мозгового кровообращения. В соответствии с распространенным подходом [1], мозг рассматривается как область, состоящая из двух частей, одна из них заполнена кровью, другая – тканью. Математическая модель переноса кислорода состоит из двух дифференциальных уравнений, описывающих конвективный и диффузионный перенос кислорода, обмен кислорода между кровью и тканью и метаболические процессы в тканях мозга.

Будем описывать перенос кислорода в мозге с помощью, так называемой, континуальной (гомогенизированной) модели, в которой фракции крови и ткани занимают одну и ту же область  $\Omega \in R^3$  [2]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi + \nu \cdot \nabla \varphi = G + \sum_{i=1}^n q_i f_i, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta \Delta \theta = -\kappa G - \mu. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация кислорода в крови,  $\theta$  – концентрация кислорода в ткани;  $G = \gamma(\theta - \psi)$  описывает обмен кислородом между кровью и тканью, величина  $\psi$  описывает концентрацию кислорода в плазме и определяется из уравнения Хилла:  $\varphi = f(\psi) = \psi + B\psi^s / (\psi^s + C)$ ;  $\nu$  – заданная скорость; функция  $\mu = \mu_0 \theta / (\theta + \theta_0)$  описывает потребление кислорода в тканях мозга;  $B, C, \alpha, \beta, \gamma, \kappa, \mu_0, \theta_0$  – положительные константы [2].

Слагаемое

$$\sum_{i=1}^n q_i f_i$$

моделирует поступление кислорода на концах артериол, где  $f_i$  – характеристические функции подобластей  $\Omega_i$ , включающих концы артериол,  $q_i$  – интенсивности источников кислорода, локализованных в данных подобластях.

Пусть  $g$  – функция, обратная к  $f$ . Уравнения (1) дополним следующими условиями на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ :

$$\varphi|_{\Gamma} = \varphi_b, \quad \theta|_{\Gamma} = g(\varphi_b) \quad (2)$$

и условиями в начальный момент времени:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3)$$

Рассматриваемая *обратная задача* состоит в нахождении интенсивностей  $\mathbf{q}(t) = \{q_1, \dots, q_m\}$  и соответствующего состояния  $y = \{\varphi, \theta\}$ , удовлетворяющих начально-краевой задаче (1) – (3) и следующим условиям переопределения:

$$\int_{\Omega_i} \varphi dx = r_i(t), \quad t \in (0, T), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где  $r_i(t)$  – заданные усредненные значения функций  $\varphi$  в подобластях  $\Omega_i$ .

Решение обратной задачи (1) – (4) сводится к минимизации функционала

$$J_{\lambda}(\varphi, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^T \left( (f_i(\varphi(t)) - r_i(t))^2 + \lambda q_i^2(t) \right) dt \rightarrow \inf,$$

где  $\lambda > 0$  – параметр регуляризации.

Пусть  $\Omega$  – ограниченная Липшицева область с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Введем множества  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ . Обозначим через  $L_p$  – пространство  $p$ -интегрируемых при  $1 \leq p \leq \infty$  (существенно ограниченных, если  $p = \infty$ ) функций,  $H^n$  – пространство Соболева  $W_2^n$ . Пространство  $L_p(0, T; X)$  состоит из  $p$ -интегрируемых на  $(0, T)$  функций, со значениями в Банаховом пространстве  $X$ .

Предположим, что параметры модели удовлетворяют следующим условиям:

$$\exists \hat{\varphi} \in H^1(Q), \quad \varphi_b = \hat{\varphi}|_{\Sigma}, \quad \theta_0, \varphi_0 \in L^2(\Omega), \quad (i)$$

$$v \in L^\infty(Q). \quad (ii)$$

Пусть  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ ,  $V_0 = H_0^1(\Omega)$ , и  $V'$  – двойственное пространство к  $V$ . Пространство  $H$  отождествляется с двойственным  $H'$  так, что  $V_0 \subset V \subset H \subset H' \subset V' \subset V_0'$ , где  $V_0'$  – двойственное к  $V_0$ . Нормы  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|_V$  определены в пространствах  $H$  и  $V$  соответственно,  $(\xi, v)$  – значение функционала  $\xi \in V'$  на элементе  $v \in V$ . В случае, если  $\xi \in H$ ,  $(\xi, v)$  совпадает со скалярным произведением в  $H$ . Определим пространство управлений  $U = L^2(0, T)$ , и пространство состояний  $W = \{v \in L^2(0, T; V_0) : v' \in L^2(0, T; V_0')\}$ , где  $v' = dv/dt$ .

Введем строго возрастающие нечетные функции  $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемые формулами:

$$\mu(r) = \frac{\mu_0 r}{\theta + \theta_0}, \quad f(r) = r + \frac{Br^s}{r^s + C}, \quad r \geq 0.$$

Пусть  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, обратная к  $f$ .

Введем операторы  $A_{1,2}: V_0 \rightarrow V_0'$ :

$$(A_1 u, v) = \alpha(\nabla u, \nabla v), \quad (A_2 w, v) = \beta(\nabla w, \nabla v),$$

где  $u, v, w \in V_0$  – произвольные функции.



Пусть  $Z := L^2(0, T; V_0) \times L^2(0, T; V_0) \times H \times H$ . Введем оператор  $F : W \times W \times U \rightarrow Z$ , та-  
кой, что:

$$F(\varphi - \hat{\varphi}, \theta - g(\hat{\varphi}), q) = \left\{ \varphi' + A_1 \varphi + v \cdot \nabla \varphi + \gamma(g(\varphi) - \theta) - \sum_{i=1}^n q_i f_i, \theta' + A_2 \theta + \mu(\theta) + \kappa \gamma(\theta - g(\varphi)), \varphi(0) - \varphi_0, \theta(0) - \theta_0 \right\}.$$

Тогда рассматриваемую обратную задачу можно записать в виде следующей задачи оптимального управления:

$$J_\lambda(\varphi, q) \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, \theta, q) = 0, \quad q_i \in U, \quad (P)$$

для которой справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i) – (ii) и  $r_i \in L^2(0, T)$ . Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (P).

Если  $\{\varphi, \theta, q\}$  является решением задачи (P), то в силу принципа Лагранжа для любых  $\zeta \in L^2(0, T; V_0)$ ,  $v \in U$ , выполняются следующие вариационные равенства:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T ((f_i, \varphi) - r_i)(f_i, \zeta) dt + \int_0^T (\zeta' + A_1 \zeta + v \cdot \nabla \zeta + \gamma g'(\varphi) \zeta, p_1) dt - \int_0^T (\kappa \gamma g'(\varphi) \zeta, p_2) dt + (\xi_1, \zeta(0)) = 0, \quad (5)$$

$$\int_0^T (\zeta' + A_2 \zeta + \mu'(\theta) \zeta + \kappa \gamma \zeta, p_2) dt - \int_0^T (\gamma \zeta, p_1) dt + (\xi_2, \zeta(0)) = 0, \quad (6)$$

$$\int_0^T (\lambda q_k - (f_k, p_1)) v dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где  $p = \{p_1, p_2\} \in L^2(0, T; V_0) \times L^2(0, T; V_0)$  – сопряженное состояние,  $\xi_1, \xi_2 \in H$  – множители Лагранжа для начальных условий.

Система (1) – (7) является системой оптимальности для решения задачи оптимального управления (P). Авторами был разработан алгоритм, основанный на методе конечных элементов, для нахождения решения задачи (P). Алгоритм реализован в пакете FreeFEM++ (<https://freefem.org/>). На основе проведенных вычислительных экспериментов проведены оценки скорости насыщения ткани кислородом и стабилизации его уровня после гипоксии.

### Библиографический список

1. Hsu, R. A Green's function method for analysis of oxygen delivery to tissue by microvascular networks / R. Hsu, T. W Secomb // Math. Biosci. – 1989. – V. 96. – I. 1. – P. 61–78.
2. Kovtanyuk, A. E. Nonstationary Model of Oxygen Transport in Brain Tissue / A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, V. L. Turova, I. N. Sidorenko, R. Lampe // Computational and Mathematical Methods in Medicine. – 2020. – V. 2020. – Article ID 4861654.

### Благодарности

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-21-00087.

### Информация об авторах

**Селезнев Тим Эдуардович** – старший преподаватель департамента математического и компьютерного моделирования ДВФУ, аспирант. E-mail: seleznev.te@dvfu.ru.

**Ковтаний Андрей Егорович** – д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор департамента математического и компьютерного моделирования ДВФУ. E-mail: kovtanyuk.ae@dvfu.ru.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НАНОЖИДКОСТНОМ СОЛНЕЧНОМ КОЛЛЕКТОРЕ

С. И. Смагин, И. С. Манжула

*Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск*

**Аннотация.** В данной работе представлены результаты построения математической модели и разработки алгоритмов для вычислительного моделирования физических процессов в солнечном коллекторе, где в качестве поглотителя солнечной энергии и теплоносителя используется наножидкость. Проведено численное исследование процессов поглощения солнечной энергии и тепломассопереноса в тонком солнечном коллекторе для некоторых перспективных наножидкостей с учетом теплообмена и поглощения энергии на его границах. Полученные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач проектирования эффективных солнечных коллекторов на основе наножидкостей.

**Ключевые слова:** солнечный коллектор, поглощение, математическое моделирование, тепломассоперенос, метод конечных разностей, аппроксимация, вычислительный эксперимент

## ON NUMERICAL SIMULATION OF PHYSICAL PROCESSES IN A NANOFLUID-BASED SOLAR COLLECTOR

S. I. Smagin, I. S. Manzhula

Computing Center FEB RAS, Khabarovsk

**Abstract.** This paper presents the results of constructing a mathematical model and developing algorithms for computational simulation of physical processes in a solar collector, where nanofluid is used as a solar energy absorber and coolant. A numerical study of the processes of absorption of solar energy and heat and mass transfer in a thin solar collector is carried out for some promising nanofluids, taking into account heat transfer and energy absorption at its boundaries. The results obtained can be used in solving applied problems of designing efficient nanofluid-based direct absorption solar collectors.

**Key words:** solar collector, absorption, mathematical modeling, heat and mass transfer, finite difference method, approximation, computational experiment

Проблема развития альтернативных источников энергии с высоким коэффициентом полезного действия поставлена и активно изучается с середины 20 века. Одним из возможных путей ее решения может быть создание систем, в основе которых лежат наножидкостные солнечные коллекторы прямого поглощения [1–3].

Солнечный коллектор прямого поглощения (СК) представляет собой специальный теплообменник, который преобразует энергию солнечного излучения в тепловую энергию рабочей жидкости. Применение наножидкостей для прямого преобразования солнечной энергии в тепловую энергию рабочей жидкости и ее переноса позволяет проектировать и использовать тонкие солнечные коллекторы с достаточно высоким коэффициентом полезного действия.

Целью данной работы является построение математической модели, разработка алгоритмов и проведения численного моделирования физических процессов в солнечном коллекторе, где в качестве поглотителя солнечной энергии и теплоносителя используется наножидкость.

Рассмотрим область  $D = \{0 < x < L, 0 < y < H\}$ , где  $L$  и  $H$  – длина и высота солнечного коллектора, через которую течет наножидкость и на которую сверху в вертикальном направлении падает солнечный свет (рис. 1). Верхняя часть коллектора покрыта прозрачной стеклянной крышкой, пропускающей солнечное излучение.

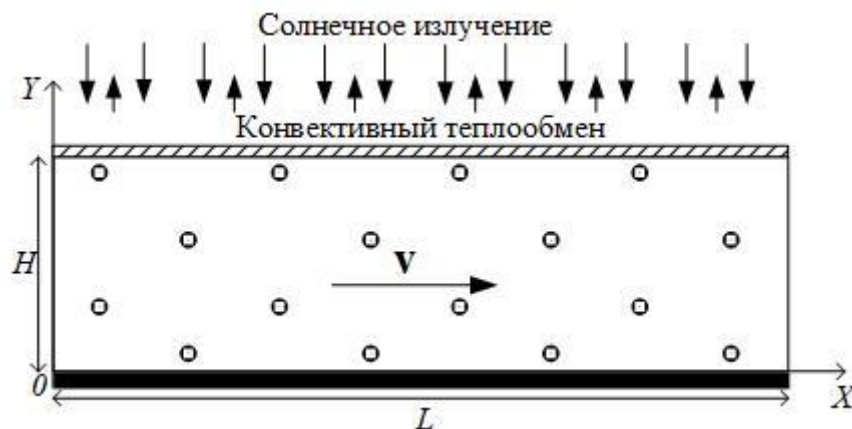


Рисунок 1 – Упрощенная схема солнечного коллектора

Процессы тепломассопереноса в солнечном коллекторе прямого поглощения хорошо описываются системой балансных уравнений для распределения температуры  $T$  рабочей жидкости в коллекторе, скорости  $\mathbf{V} = (v, u)$  ее течения и  $p$  – давления, которая имеет вид:

$$\nabla(k\nabla T) - c_v \mathbf{V} \nabla T - \nabla \mathbf{I} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$\mu \Delta \mathbf{V} - \rho(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} - \nabla p = 0, \quad \nabla \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  и  $\Delta = \nabla^2$ ;  $k$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  – удельная теплопроводность, удельная объемная теплоемкость, плотность и динамическая вязкость наножидкости [1 – 3];  $\mathbf{I} = (0, -I_\theta)$ ,  $I_\theta$  – интенсивность солнечного излучения [3].

Граничные значения для температуры жидкости и давления на входе и выходе коллектора считаются постоянными и задаются равенствами:

$$(T, p)|_{x=0} = (T_{in}, p_{in}), \quad p|_{x=L} = p_{out}. \quad (3)$$

Краевые условия на нижней и верхней границах солнечного коллектора используются в виде

$$(k \partial T / \partial y - \sigma_0 (T - T_e) + \alpha I_\theta)|_{y=0} = 0, \quad (k \partial T / \partial y + \sigma_H (T - T_e))|_{y=H} = 0, \quad \mathbf{V}|_{y=0,H} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $T_e$  – температура окружающей среды;  $\sigma_0$ ,  $\sigma_H$  – коэффициенты теплоотдачи на нижней и верхней границах соответственно;  $I_\theta$  – интенсивность солнечного излучения с учетом эффекта отражения от нижней границы СК;  $\alpha$  – коэффициент, принимающий значения 0 и 1.

Условия (4) при  $\alpha = 0$  соответствуют теплообмену на границах с внешней средой по закону Ньютона-Рихмана. Если положить  $\alpha = 1$ , то также можно учесть и поглощение части энергии светового потока нижней границей коллектора и ее передачу рабочей жидкости. В этом случае на нижней границе можно моделировать условия со светоотражением ( $\theta = 1$ ), светопоглощением ( $\theta = 0$ ) и гибридное ( $0 < \theta < 1$ ), когда нижняя граница выполнена из материала, способного частично поглощать и отражать поток солнечного излучения.

Разработан и теоретически обоснован вычислительный алгоритм приближенного решения упомянутой задачи для тонкого наножидкостного коллектора, в основе которого лежит симметричная конечно-разностная схема. Создан комплекс программ для численного моделирования процесса тепломассопереноса в СК.

Проведено численное исследование процессов тепломассопереноса в тонком солнечном коллекторе ( $L \gg H$ ) для перспективных наножидкостей и условий теплообмена на его границах. Для каждого вида рабочей жидкости и типа нижней границы был вычислен коэффициент полезного действия солнечного коллектора. Полученные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач проектирования эффективных солнечных коллекторов, на основе наножидкостей.

#### **Библиографический список**

1. Tyagi, H. Predicted efficiency of a low-temperature nanofluid-based direct absorption solar collector / H. Tyagi, P. Phelan, R. Prasher // *Journal of Solar Energy Engineering*. – 2009. – V. 131 (4). – DOI: 10.1115/1.3197562.
2. Gorji, T. B. A numerical and experimental investigation on the performance of a low-flux direct absorption solar collector (DASC) using graphite, magnetite and silver nanofluids / T. B. Gorji, A. A. Ranjbar // *Solar Energy*. – 2016. – V. 135. – P. 493–505. – DOI: 10.1016/j.solener.2016.06.023.
3. Sani, E. Potential of carbon nanohorn-based suspensions for solar thermal collectors [Electronic resource] / E. Sani et al. // *Solar Energy Materials and Solar Cells*. – 2011. – V. 95 (11). – P. 2994–3000.

#### **Информация об авторах**

**Смагин Сергей Иванович** – д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, главный научный сотрудник и научный руководитель ВЦ ДВО РАН. E-mail: smagin@ccfebras.ru.

**Манжула Илья Сергеевич** – младший научный сотрудник лаборатории информационных технологий ВЦ ДВО РАН. E-mail: manzhula\_94@mail.ru.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДИФфуЗИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА

О. В. Соболева

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** В статье разрабатывается и исследуется численный алгоритм восстановления неизвестного коэффициента диффузии для стационарной модели массопереноса. Описываются результаты вычислительных экспериментов. Показывается зависимость решения обратной экстремальной задачи от выбора места расположения и площади области, отвечающей за дополнительную информацию о решении задачи для модели массопереноса.

**Ключевые слова:** обратные экстремальные задачи, диффузия-реакция, массоперенос, коэффициент диффузии

## STUDY OF NUMERICAL ALGORITHM OF IDENTIFICATIONS OF UNKNOWN DIFFUSION COEFFICIENT FOR STATIONARY MASS TRANSFER MODEL

O. V Soboleva

*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok*

**Abstract.** The paper is developed and investigated a numerical algorithm for recovering an unknown diffusion coefficient for a stationary mass transfer model. The results of computational experiments are described. The dependence of the solution of the inverse extreme problem on the selection of the location and area of the area responsible for additional information about the solution of the problem for the mass transfer model is shown.

**Key words:** inverse extreme problems, diffusion-reaction, mass transfer, diffusion coefficient

Данная работа продолжает ряд исследований, описанных в работах [1-4], посвященных теоретическому и численному исследованию обратных экстремальных задач для уравнения диффузии-реакции. В указанных статьях внимание уделяется задаче восстановления коэффициента диффузии для модели массопереноса, являющегося константой или зависящего от пространственной переменной. В работах [1, 2, 4] описываются результаты тестирования численного алгоритма восстановления неизвестного коэффициента диффузии, которые продемонстрировали его эффективность. В [4] также исследуется зависимость решения обратной экстремальной задачи от различных параметров численного алгоритма, для случая, когда коэффициент диффузии зависит от пространственной переменной. К сожалению, в указанных работах не исследуется вопрос о влиянии места расположения и размера подобласти, из которой берется дополнительная информация о решении, на качество решения обратной экстремальной задачи.

Целью данной работы является исследование зависимости решения обратной экстремальной задачи для модели массопереноса от местоположения и размера подобласти, из которой берется дополнительная информация о решении краевой задачи. Модель массопереноса содержит ряд физических параметров, которые должны быть заданы для нахождения решения краевой задачи. Но в случае, когда некоторые параметры модели могут оказаться неизвестными и их требуется найти, используют дополнительную информацию о решении кра-

евои задачи [5–9]. В связи с этим, размеры и расположение подобласти, в которой берется дополнительная информация о решении, играют важную роль при исследовании алгоритма, разработанного для восстановления неизвестных параметров обратных экстремальных задач для модели массопереноса [5, 8].

Начнем с постановки прямой задачи. Рассмотрим в ограниченной области  $\Omega$  из пространства  $R^d$ ,  $d = 2, 3$  с липшицевой границей  $\Gamma$  краевую задачу для модели переноса вещества, описываемую следующими соотношениями:

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla \varphi) + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi|_{\Gamma} = \psi. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda \equiv \lambda(x) > 0$  – переменный коэффициент диффузии,  $k = k(x) \geq 0$  – величина, характеризующая распад вещества за счет химических реакций,  $f = f(x)$  – плотность объемных источников,  $\psi = \psi(x)$  – функция, заданная на границе  $\Gamma$ .

Краевая задача (1) содержит ряд параметров, которые должны быть заданы для нахождения ее единственного решения. На практике же могут возникать ситуации, когда некоторые из параметров неизвестны и их нужно определить вместе с решением  $\varphi$  задачи (1). В этих случаях возникает необходимость решения обратных задач для модели (1), заключающихся в нахождении неизвестных параметров по определенной информации о состоянии системы [5–9]. В качестве такой информации мы возьмем значения концентрации  $\varphi_d(x)$ , измеряемые в некоторой подобласти  $Q \subset \Omega$ . В качестве неизвестного параметра будет выступать коэффициент  $\lambda$ .

Для исследования поставленной задачи идентификации применим метод оптимизации, с использованием которого сведем решение поставленной задачи к соответствующей экстремальной задаче (см. [5, 6]). С этой целью введем следующий функционал качества:

$$I(\varphi) = \|\varphi - \varphi_d\|_{L^2(Q)}^2 = \int_Q |\varphi - \varphi_d|^2 dx = \int_{\Omega} r(\varphi - \varphi_d)^2 dx,$$

Здесь  $r$  – характеристическая функция множества  $Q$ . Тогда обратная экстремальная задача будет состоять в нахождении функций  $(\varphi, \lambda)$ , таких, что

$$(\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (k\varphi, h) = (f, h) \text{ в } \Omega, \quad \varphi|_{\Gamma} = \psi,$$

$$J(\varphi, \lambda) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|^2 \rightarrow \inf, \quad (\varphi, \lambda) \in H^1(\Omega) \times L^2(Q) \quad (2)$$

где  $\mu_0 \geq 0$ ,  $\mu_1 \geq 0$  положительные константы. Описание других параметров можно найти, например, в [5, глава 3].

С помощью математического аппарата книги [5] в этой работе выводится система оптимальности. Она состоит из прямой задачи, сопряженной задачи и вариационного неравенства и имеет следующий вид:

$$(\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (k\varphi, h) = (f, h) \text{ в } \Omega, \quad \varphi|_{\Gamma} = \psi, \quad (3)$$

$$(\lambda \nabla \tau, \nabla \eta) + (k\tau, \eta) = (\varphi - \varphi_d, h)_Q \text{ в } \Omega, \quad \eta|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

$$(\mu_1 \hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda}) + ((\lambda - \hat{\lambda}) \nabla \hat{\varphi}, \nabla \hat{\eta}) = 0, \quad \forall \lambda \in L^2(\Omega). \quad (5)$$

На основе системы оптимальности строится алгоритм численного решения обратной экстремальной задачи (2). Алгоритм тестируется с помощью программного пакета Scilab [10]. Дискретизация граничных задач проводится методом конечных разностей, а решение системы оптимальности основывается на использовании метода Ньютона [11, 12].

При проведении вычислительных экспериментов в качестве области исследования выбирается единичный квадрат. Внутри исследуемой области предусматривается наличие объемного источника. Предполагается, что процесс химической реакции отсутствует, т.е. коэффициент химической реакции равняется нулю. На границе области регистрируется некоторое количество вещества, и концентрация его зависит от пространственных переменных. Точность решения обратной экстремальной задачи определяется с помощью относительных ошибок  $E_0 = \|\varphi - \varphi_d\|_Q / \|\varphi_d\|$  и  $E_1 = \|\lambda - \lambda_d\| / \|\lambda_d\|$ . Заметим, что в работе рассматриваются

случаи, когда восстанавливаемый коэффициент диффузии является константой или зависит от пространственных переменных.

Вычислительные эксперименты позволяют установить точность, которую имеет решение рассматриваемой обратной экстремальной задачи в зависимости от размера выбираемой подобласти измерений и ее расположения, и подтверждают эффективность разработанного алгоритма в случае выбора подобластей небольших размеров относительно размера исследуемой области. Результаты проведенных исследований позволяют определить места расположения датчиков для замера концентрации в исследуемой области, и их количество, обеспечивающее требуемую точность решения обратной задачи.

### **Библиографический список**

1. Soboleva, O. V. Numerical analysis of inverse problems for the model of transfer of industrial environmental pollution in the machine-building / O. V. Soboleva // *Applied Mechanics and Materials (AMM)*. – 2015. – V. 770. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.770.695.
2. Soboleva, O. V. Numerical analysis of inverse problems for the model of transfer of industrial environmental pollution in the machine-building / O. V. Soboleva, D. V. Mashkov // *Applied Mechanics and Materials (AMM)*. – 2015. – V. 756. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.756.353.
3. Soboleva, O. V. Optimization approach in modelling the effects of technological disasters / O. V. Soboleva, A. V. Brizitskaya, Yu. K. Dyachenko // *Int. Sci. and Tech. Conf. "Earth Science" IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. – 2020. – V. 459.
4. Soboleva, O. V. Mathematical modelling of production localization with risks of technological disaster / O. V. Soboleva, A. V. Brizitskaya, Yu. K. Dyachenko // *Int. Sci. and Tech. Conf. (Far East Con. 2020). IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2021. – V. 1079. – DOI: 10.1088/1757-899X/1079/6/062089.
5. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости / Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко. – Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.: ил.; 22 см. – ISBN 978-5-8044-1045-3.
6. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с. – ISBN 978-5-382-00990-2.
7. Алексеев, Г. В. Экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции / Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко // *Прикл. механ. тех. физ.* – 2010. – Т. 51(4). – С. 72–84.
8. Алексеев, Г. В. Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции / Г. В. Алексеев, И. С. Вахитов, О. В. Соболева // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2012. – Т. 52 (12). – С. 2190–2205.
9. Soboleva, O. V. Numerical analysis of inverse problems for the model of transfer of industrial environmental pollution in the machine-building / O. V. Soboleva, D. V. Mashkov // *Applied Mechanics and Materials (AMM)*. – 2015. – V. 756. – P. 353–358. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.756.353.
10. Scilab. Доступно в интернете: <https://www.scilab.org> (дата обращения: 03.04.2023).
11. Оптимизация. Теория и алгоритмы / Сеа Ж. – М.: Мир, 1973.
12. Метод Ньютона. Доступно в интернете: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод\\_Ньютона](https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Ньютона) (дата обращения: 03.04.2023).

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00271, <https://rscf.ru/project/22-21-00271/>.

### **Информация об авторах**

**Соболева Ольга Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, м.н.с. Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: soboleva22@mail.ru.

## ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В 3D ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ МАГНИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Ю. Э. Спивак

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** Рассматриваются задачи проектирования многослойных экранирующих или маскировочных оболочек для 3D модели магнитостатики. Предполагается, что эти оболочки состоят из конечного числа сферических слоев, заполненных анизотропными или изотропными средами. С помощью оптимизационного метода рассматриваемые задачи сводятся к экстремальным и исследуются их свойства. Для численного решения этих задач предлагается эффективный численный алгоритм, основанный на улучшенной версии метода роя частиц (МРЧ). Анализируются полученные результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** магнитостатика, оптимизационный метод, обратные задачи, экранирование, маскировка, многослойная оболочка, метод роя частиц

## NUMERICAL OPTIMIZATION IN 3D PROBLEMS OF DESIGNING MULTILAYER MAGNETIC SHELLS

Yu. E. Spivak

*Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok  
Far Eastern Federal University, Vladivostok*

**Abstract.** The problems of designing multilayer shielding or cloaking shells for 3D model of magnetostatics are considered. It is assumed that these shells consist of a finite number of spherical layers filled with anisotropic or isotropic media. By the optimization method, the problems are reduced to the extremum ones and their properties are studied. For numerical solving the problems, an effective numerical algorithm based on an improved version of the particle swarm optimization (PSO) is proposed. The obtained results of numerical simulation are analyzed.

**Key words:** magnetostatics, optimization method, inverse problems, shielding, cloaking, multilayer shell, chaos accelerated particle swarm optimization

В течение последнего десятилетия интенсивно развиваются новые направления в математической и технической физике, связанные с разработкой эффективных методов и алгоритмов решения задач проектирования специальных функциональных устройств управления физическими полями [1, 2]. Важным частным примером таких устройств является магнитная оболочка  $\Omega = \{a < r < b\}$ , состоящая из нескольких ( $M$ ) сферических слоев  $\Omega_m = \{x \in R^3 : R_{m-1} < r = |x| < R_m\}$ ,  $m = 1, \dots, M$ , в трехмерном пространстве, заполненных однородными анизотропными или изотропными средами с постоянными магнитными проницаемостями в виде тензоров  $\mu_m = \text{diag}(\mu_{rm}, \mu_{\theta m}, \mu_{\phi m})$  (см. рис. 1) [3–5]. Такого вида оболочка может иметь различный функционал, например, она может использоваться для экранирования или маскировки материальных тел, расположенных в ее внутренней области  $\Omega_0 = \{x \in R^3 : r = |x| < a\}$ , при наличии внешне приложенного магнитного поля  $H_a = -\nabla \Phi_a$  (см. рис. 1).



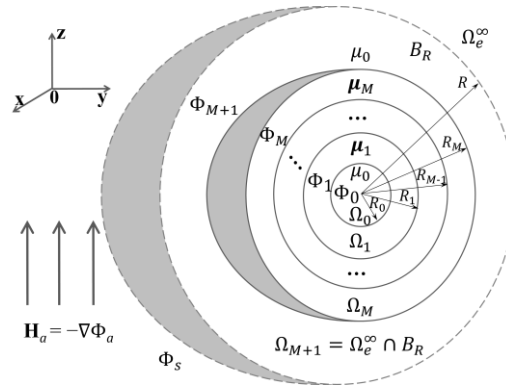


Рисунок 1 – Геометрия 3D многослойной магнитной оболочки и схематическое распределение магнитного поля

Для описанного физического сценария прямая задача магнитостатики сводится к нахождению функций  $\Phi_m = (\Phi_a + \Phi_s)|_{\Omega_m}$ ,  $m = 0, \dots, M+1$ , (см. рис. 1), удовлетворяющих следующим соотношениям [6]:

$$\Delta\Phi_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \operatorname{div}(\mu_m \nabla\Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \Delta\Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (1)$$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_{rm} \frac{\partial\Phi_m}{\partial r} = \mu_{r(m+1)} \frac{\partial\Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = 0, \dots, M, \quad (2)$$

$$\Phi_0(x) = O(1) \text{ при } r = |x| \rightarrow 0, \quad \Phi_s(x) \rightarrow 0 \text{ при } r = |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Здесь  $\Phi_s$  – дополнительное (вторичное) поле,  $\Omega_e^\infty = \{x \in R^3 : r = |x| > b\}$ ,  $\Omega_{M+1} = \Omega_e^\infty \cap B_R$ ,  $B_R$  – шар достаточно большого радиуса  $R$ , содержащий  $\Omega$  внутри себя.

Пусть  $\Phi[m] = (\Phi_0[m], \Phi_1[m], \dots, \Phi_M[m], \Phi_{M+1}[m])$  – решение прямой задачи (1) – (3), отвечающее  $2M$ - мерному вектору  $m = (\mu_{r1}, \mu_{\theta1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\theta M})$ , составленному из компонент  $\mu_{rm}, \mu_{\theta m}$  тензоров  $\mu_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , [6]. Обратная задача магнитной маскировки формулируется так: требуется найти вектор  $m$ , исходя из выполнения двух независимых условий [7, 8]:

$$\nabla\Phi_0[m] = 0, \text{ (т.е. } \Phi_0[m] = \text{const) в } \Omega_0, \quad (4)$$

$$\Phi_{M+1}[m] = \Phi_a|_{\Omega_{M+1}}, \text{ (т.е. } \Phi_s[m] = 0) \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (5)$$

Частный случай нахождения вектора проницаемостей  $m$  из условия (4) определяет задачу экранирования, а нахождение  $m$  из условия (5) отвечает задаче внешней маскировки.

В настоящей работе разрабатывается эффективный численный алгоритм для нахождения высокоточных решений обратной задачи (4), (5). Указанный алгоритм основывается на оптимизационном методе [9], в соответствии с которым вводятся множество управлений  $K$ , функционалы качества и формулируются соответствующие экстремальные задачи, и на улучшенной версии (в отличие от классической версии) метода глобальной оптимизации – метода роя частиц [10]. С помощью проведенных вычислительных экспериментов устанавливаются важные свойства оптимальных решений, в частности, полученные решения обладают свойством релейности для всех управлений, кроме последнего  $\mu_M^{opt}$  в случае задачи маскировки (см. рис. 2), а отвечающие им высокoeffективные экранирующие и маскировочные оболочки обладают простотой технической реализации.

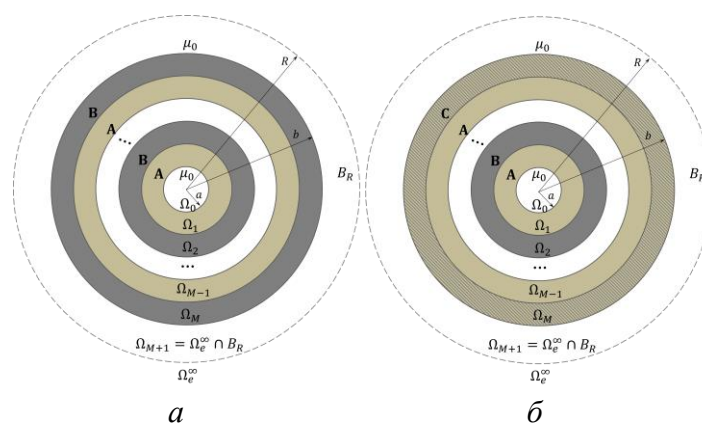


Рисунок 2 – Принцип релейности для оптимального решения задачи экранирования (а) и задачи маскировки – (б)

### Библиографический список

1. Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе / Г. В. Алексеев. – Владивосток: Дальнаука, 2016. – 224 с. – ISBN: 978-5-80441630-1.
2. Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел / Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 328 с. – ISBN: 978- 5-9221-1919-1.
3. Sanchez, A. Antimagnets: controlling magnetic fields with superconductor metamaterial hybrids / A. Sanchez [et al.] // New J. Phys. – 2011. – V. 13 (093034). – P. 1–11. – DOI: 10.1088/1367-2630/13/9/093034.
4. Gömory, F. Experimental realization of a magnetic cloak / F. Gömory [et al.] // Science. – 2012. – V.335. – P. 1466–1468. – DOI: 10.1126/science.1218316.
5. Batool, S. Cloaking using the anisotropic multilayer sphere / S. Batool [et al.] // Photonics. – 2020. – V. 7 (52). – P. 1–12. – DOI: 10.3390/photonics7030052.
6. Spivak, Y.E. Computer design of cylindrical cloaking shell for the magnetostatics model / Y. E. Spivak // Far Eastern Mathematical Journal. – 2022. – V. 22 (2). – P. 237–243. – DOI: 10.47910/FEMJ202232.
7. Алексеев, Г. В. Численный анализ двумерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Дифф. уравнения. – 2020. – Т. 56. – № 9. – С. 1252–1262. – DOI: 10.1134/S0374064120090113.
8. Алексеев, Г. В. Численный анализ трехмерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 2021. – Т. 61. – № 2. – С. 224–238. – DOI: 10.31857/S0044466921020034.
9. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
10. Michaloglou, A. Feasible optimal solutions of electromagnetic cloaking problems by chaotic accelerated particle swarm optimization / A. Michaloglou, N. Tsitsas // Mathematics. – 2021. – V. 9 (2725). – P. 1–23. – DOI: 10.3390/math9212725.

### Благодарности

Работа выполнена в ДЦМИ при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-946 от 16.02.2023 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

### Информация об авторах

Спивак Юлия Эдуардовна – младший научный сотрудник Лаборатории вычислительной информатики ИПМ ДВО РАН, младший научный сотрудник РНОМЦ ДЦМИ ДВФУ. E-mail: uliyaspivak@gmail.com.

## БИСТАБИЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ТИПА ХОДЖКИНА-ХАКСЛИ КАК ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕЙ С ПАТОЛОГИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

Н. В. Станкевич

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород*

**Аннотация.** Рассматриваются сети моделей типа Ходжкина-Хаксли с различными типами связей и топологией. В качестве узлов сетей исследуются три вида моделей: демонстрирующая пачечную активность (модель Шермана-Ринцеля) и две ее модификации с бистабильностью между пачечным аттрактором и состоянием покоя с различными характеристиками ионных каналов. Исследованы условия стабилизации устойчивого равновесия (состояние покоя) и его доминирования в зависимости от типов связей, а также топологии сети.

**Ключевые слова:** бистабильность, модель типа Ходжкина-Хаксли, состояние покоя, пачечная колебательная активность

## BISTABLE MODELS OF THE HODGKIN-HUXLEY TYPE AS NETWORK ELEMENTS WITH PATHOLOGICAL BEHAVIOR

N. V. Stankevich

HSE University, Nizhny Novgorod

**Abstract.** Networks of Hodgkin-Huxley type models with different types of coupling and topology are considered. As network nodes, three types of models are studied: one that demonstrates bursting activity (the Sherman-Rinzel model) and two of its modifications with bistability between the bursting attractor and the silent state with different characteristics of ion channels. The conditions for stabilization of a stable equilibrium (stable steady state) and its dominance depending on the types of coupling, as well as the topology of the network are studied.

**Key words:** bistability, model of Hodgkin-Huxley type, silent state, bursting oscillatory activity

Сети взаимодействующих осцилляторов являются одним из важнейших объектов исследования динамики сложных систем в различных областях науки. Одним из наиболее интересных направлений является изучение взаимодействия моделей нейронов, описываемых формализмом Ходжкина-Хаксли, так как оно имеет непосредственное отношение к изучению взаимодействия биологических клеток, а также важно для развития искусственного интеллекта и машинного обучения [1-2].

Типичным поведением, соответствующим нормальному режиму функционирования клеток, описываемых формализмом Ходжкина-Хаксли, таких как нейроны, бета-клетки поджелудочной железы, кардиомиоциты и др., является динамический режим, соответствующий пачечной колебательной активности. Модели типа Ходжкина-Хаксли описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых характерным является возможность возникновения мультистабильности. Кроме того, могут сосуществовать разные типы аттракторов, различные виды мультистабильности обсуждаются в работе [3]. Одним из наиболее интересных вариантов является мультистабильность между пачечным аттрактором и устойчивым состоянием равновесия.

В [4] предложена модификация известной модели Шермана-Ринцеля, в которой помимо типичного пачечного аттрактора стабилизируется состояние равновесия. Модификация

модели заключается в учете дополнительного ионного канала с немонотонной характеристикой, который локально изменяет быстрое многообразие модели, т.е. модель сохраняет все свои основные свойства. Новый ионный канал можно интерпретировать как дефект клеточной коммуникации, так как вероятность его открытия ниже, чем у обычного канала. Немонотонность характеристики открытия ионного канала может противоречить физиологической интерпретации данного ионного канала. В [5] предложена еще одна модификация, в которой новый ионный канала имеет монотонную функциональную зависимость, что является более естественным с физиологической точки зрения. При этом в системе возникает также бистабильность между состоянием покоя и пачечной колебательной активностью. Состояние равновесия для каждой из модификаций при определенных параметрах имеет маленький бассейн притяжения. Таким образом, вероятность реализации данного состояния мала. При этом при взаимодействии возможно задание сети таким образом, что состояние покоя станет доминирующим.

В рамках данной работы мы представим результаты исследования различных сетей, на основе описанных выше моделей типа Ходжкина-Хаксли. Наличие нескольких близких по своей структуре и динамическому поведению моделей позволяет моделировать гетерогенные сети, часть элементов которых имеет дефект связи, а часть нет.

В работе показано, что электрическая связь в сети приводит к стабилизации состояния равновесия, а также разрушению аттрактора, отвечающего пачечной колебательной активности. Данный эффект наблюдается в гомогенных сетях, в которых базовыми элементами являются модели с бистабильностью. При добавлении элементов без устойчивого состояния равновесия, состояние равновесия в полной системе становится неустойчивым при малой связи. Учет химической связи дестабилизирует состояние равновесия, однако в таких сетях наблюдается синфазная синхронизация пачечной активности, за счет гомоклинической бифуркации седло-фокусного предельного цикла к хаотическому аттрактору.

### **Библиографический список**

1. Динамические системы в нейронауке / Е. М. Ижикевич. – М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2018. – 520 с.
2. Single neuron computation / T. M. McKenna, J. L. Davis, S. F. Zornetzer. (Eds.). – Academic Press, 2014.
3. Malashchenko, T. Six types of multistability in a neuronal model based on slow calcium current / T. Malashchenko, A. Shilnikov, G. Cymbalyuk // PLoS One. – 2011. – V. 6 (7). – P. e21782. – DOI: 10.1371/journal.pone.0021782.
4. Stankevich, N. V. Coexistence between silent and bursting states in a biophysical Hodgkin-Huxley-type of model / N.V. Stankevich, E. Mosekilde // CHAOS. – 2017. – V. 27 (11). P. 123101. – DOI: 10.1063/1.4986401
5. Stankevich, N. V. The simplest neuron models with bistability occurring as a result of accounting new ion channels / N. V. Stankevich, E. R. Bagautdinova // 2022 6th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA). – 2022. – P. 266–269. – DOI: 10.1109/DCNA56428.2022.9923176.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 20-71-10048.

### **Информация об авторах**

**Станкевич Наталия Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доц., с.н.с. Лаборатории топологических методов в динамике Национального исследовательского университета Высшая школа экономики – Нижний Новгород. E-mail: stankevichnv@mail.ru.

## ЭВОЛЮЦИЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНО НАГРЕВАЕМОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КАНАЛЕ

И. В. Степанова

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

**Аннотация.** Работа посвящена анализу нестационарной конвекции бинарной смеси в длинном горизонтальном канале, стенки которого неоднородно нагреты. Для описания термодиффузионного разделения используется математическая модель, сформулированная в виде краевой задачи для уравнений Обербека-Буссинеска. Численное решение задачи получено в упрощенной и полной постановке. Показано, что нестационарное решение может стабилизироваться при выполнении ограничений на входные данные задачи.

**Ключевые слова:** конвекция, термодиффузия, бинарная смесь, уравнения Обербека-Буссинеска, нестационарное решение

## EVOLUTION OF A CONVECTIVE FLOW IN A NONHOMOGENEOUSLY HEATED HORIZONTAL CHANNEL

I. V. Stepanova

Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Krasnoyarsk

**Abstract.** The work is devoted to the analysis of non-stationary convection of a binary mixture in a long horizontal channel, where the walls are non-uniformly heated. To describe the thermal diffusion separation, the mathematical model formulated as a boundary value problem for the Oberbeck-Boussinesq equations is used. The numerical solution of the problem is obtained in a simplified and complete statement. It is shown that the non-stationary solution is stabilized if the input data of the problem are specified.

**Key words:** convection, thermal diffusion, binary mixture, Oberbeck-Boussinesq equations, non-stationary solution

Широко известно, что одним из методов исследования конвективных течений жидкостей является изучение их характеристик на основе математических моделей, сформулированных в виде краевых задач для уравнений в частных производных. Для описания движения жидкостей, как правило, используются уравнения Навье-Стокса, которые при необходимости учета неоднородности температуры и состава среды дополняются уравнениями теплообмена. Несмотря на то, что уравнения переноса тепла и массы имеют одинаковую дифференциальную форму, анализ течения смесей гораздо более затруднителен по сравнению с исследованием движения чистых жидкостей. Причина заключается в различиях механизмов диффузии тепла и примеси, а также в появлении конкурирующих перекрестных эффектов.

Математическая модель, построенная в случае, если жидкость считается несжимаемой, изменения плотности учитываются только в члене, отвечающем за силу плавучести, при этом плотность является линейной функцией температуры и концентрации, называется приближением Обербека-Буссинеска [1]. При рассмотрении течений в протяженных горизонтальных каналах можно считать, что вектор скорости имеет только горизонтальную компоненту  $u$ , зависящую от поперечной координаты  $y$  и времени  $t$ . Дополнительно предполагая, что температура  $\theta$  и концентрация  $c$  являются функциями

переменных  $t$ ,  $x$  и  $y$ , запишем уравнения Обербека-Буссинеска в виде

$$\begin{aligned} u_t &= \nu u_{yy} - \frac{1}{\rho_0} p_x^*, & g(\beta_1 \theta + \beta_2 c) &= \frac{1}{\rho_0} p_y^*, \\ \theta_t + u \theta_x &= \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}), & c_t + u c_x &= D(c_{xx} + c_{yy}) + D^0(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p^*$  – давление с точностью до гидростатического,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\rho_0$  – средняя плотность,  $\chi$  и  $D$  – коэффициенты температуропроводности и диффузии,  $\beta_{1,2}$  – коэффициенты температурного и концентрационного расширения. В уравнениях (1) учтено влияние эффекта Соре, состоящего в изменении концентрации под действием градиента температуры. В последнем слагаемом четвертого уравнения в системе (1) коэффициент термодиффузии  $D^0$  считается положительным, а термодиффузия нормальной, если градиенты температуры и концентрации сонаправлены. Аномальная термодиффузия проявляется при разнонаправленных градиентах, в этом случае  $D^0 < 0$ .

В работе [2] проведено исследование совместности уравнений (1), обнаружено, что система разрешима в том числе тогда, когда функции  $\theta$  и  $c$  являются многочленами переменной  $x$  степени не выше третьей. Если при этом решение уравнений (1) строится для функций температуры и концентрации, заданных соотношениями

$$\theta(x, y, t) = A(y, t)x + B(y, t), \quad c(x, y, t) = N(y, t)x + M(y, t), \quad (2)$$

где функции  $A, B, M, N$  требуют определения, говорят, что решение принадлежит классу Остроумова-Бириха. Под последним подразумеваются все решения уравнений конвекции однородных и неоднородных жидкостей, в которых функции температуры и концентрации линейно зависят от продольной координаты. Подстановка вида решения (2) в систему (1) и последующее расщепление по степеням переменной  $x$  ведет к системе последовательно решаемых уравнений для определения функций  $A, N, u, B, M$ . Функция давления восстанавливается из первых двух уравнений (1) с помощью найденных выше функций. В качестве граничных условий задаются условия прилипания на твердых стенках, законы их нагрева (линейное по переменной  $x$  распределение температуры), отсутствие потока вещества через стенки. Этих условий оказывается недостаточно для замыкания задачи и вводится дополнительное соотношение, определяющее расход жидкости через поперечное сечение слоя. Использование указанных граничных условий и начальных данных для функций скорости, температуры и концентрации дает корректную постановку начально-краевой задачи. Необходимо отметить, что в случае рассмотрения соответствующей задачи для описания стационарного течения (все функции не зависят от переменной  $t$ , начальные условия отсутствуют) перечисленных соотношений оказывается недостаточно вследствие определения функции  $c$  с точностью до постоянной. Тогда для замыкания задачи ставится дополнительное интегральное условие на среднюю концентрацию в слое.

В работе построено стационарное решение описанной задачи, установлено, что единственным механизмом, индуцирующим появление неоднородностей концентрации, является термодиффузионный эффект. Анализ влияния геометрии задачи и физических постоянных на конвективное течение позволил сделать выводы о том, что максимальные неоднородности концентрации возникают при самой большой толщине слоя, выполнении условия замкнутости потока, а также при самых больших продольных градиентах температуры на стенках канала. Стационарный профиль скорости представлен сплошной кривой на рис. 1 в безразмерных переменных. Для построения графика использовались физические свойства бинарной жидкости – водный раствор этанола с концентрацией последнего 70 %; толщина слоя считалась равной 5 мм, характерная температура 20 °С. Во всех вычислениях предполагалось, что нижняя стенка более нагрета, чем верхняя. В случае

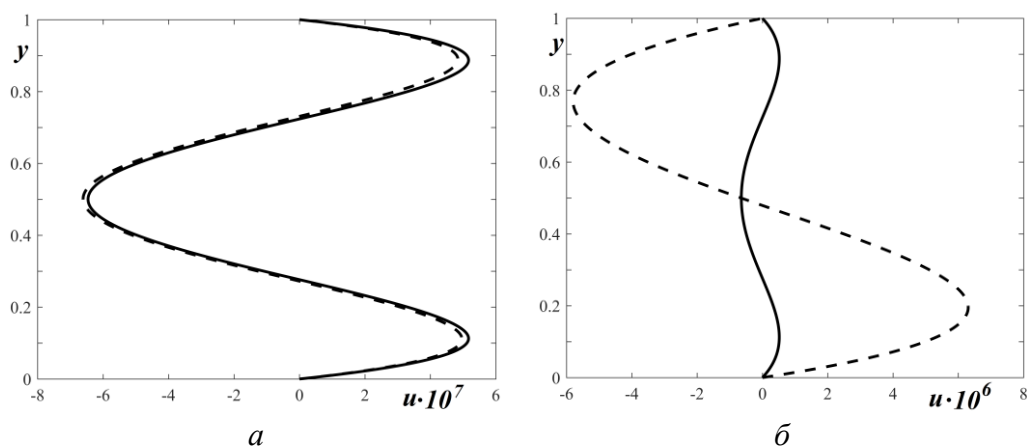


Рисунок 1 – Профили скорости: сплошная кривая – стационарный режим, пунктирная – нестационарный режим при  $t \rightarrow \infty$ ; (а) / (б) – выполнены / не выполнены условия сходимости

нестационарного движения была рассмотрена упрощенная линейная задача, позволяющая найти только продольные градиенты температуры и концентрации и скорость. С помощью свойств преобразования Лапласа показано, что с ростом времени нестационарное решение выходит на стационарный режим, если выполнены условия сходимости градиентов температуры, заданной на твердой стенке, к их стационарным значениям. Кроме того, необходимо согласование начального градиента концентрации с остальными данными задачи по выведенному в работе критерию. Пунктирные кривые на рис. 1 соответствуют нестационарному решению в случаях, когда описанные условия согласования выполнены (а), и когда они не выполняются (б). Можно увидеть, что в последнем случае решение не выходит на найденный стационарный режим, хотя и стабилизируется на больших временах: при дальнейшем увеличении  $t$  график скорости не изменяется. При решении полной нелинейной задачи были восстановлены поля температуры и концентрации, проведен анализ влияния периодической тепловой нагрузки на стенке канала на движение жидкости. Установлено, что более легкий компонент смеси (этанол) скапливается у более нагретой стенки. Это подтверждает, что используемая математическая модель адекватно отображает действие эффекта термодиффузии и может быть использована для расчетов движения смеси при различных зависимостях тепловой нагрузки на стенках канала от времени.

### Библиографический список

1. Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с. – ISBN: 978-5-9221-5.
2. Андреев, В. К. Об условиях существования однонаправленных движений бинарных смесей в модели Обербека-Буссинеска / В. К. Андреев, И. В. Степанова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2019. – Т. 22. – № 2(78). – С. 3–12. – DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.201.

### Благодарности

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912). Автор благодарит доцента кафедры ММиПУ СФУ В. Е. Зализняка за предоставленный код для вычисления нестационарных характеристик течения.

### Информация об авторах

**Степанова Ирина Владимировна** – д-р физ.-мат. наук, доц., старший научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск. E-mail: stepiv@icm.krasn.ru.

## О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И КАЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНКАХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ В ЭЛЕКТРОННО-ЗОНДОВЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

М. А. Степович<sup>1</sup>, Д. В. Туртин<sup>2</sup>, В. В. Калманович<sup>1</sup>, А. А. Картанов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, Калуга

<sup>2</sup> Ивановский государственный университет, Иваново

<sup>3</sup> ООО «КАМИН-Классик», Калуга

**Аннотация.** Рассмотрена новая математическая модель диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных широким пучком электронов в однородной полупроводниковой мишени конечной толщины. Получены количественные оценки зависимости решения от правой части дифференциального уравнения. Обсуждаются возможности использования этой модели в электронно-зондовых технологиях полупроводников.

**Ключевые слова:** электроны, полупроводники, неосновные носители заряда, диффузия, качественные оценки, корректность

## ON SOME ASPECTS OF MATHEMATICAL MODELING AND QUALITATIVE ASSESSMENTS OF DIFFUSION PROCESSES IN ELECTRON PROBE TECHNOLOGIES OF SEMICONDUCTOR MATERIALS

M. A. Stepovich<sup>1</sup>, D. V. Turtin<sup>2</sup>, V. V. Kalmanovich<sup>1</sup>, A. A. Kartanov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Tsiolkovsky Kaluga State University, Kaluga

<sup>2</sup> Ivanovo State University, Ivanovo

<sup>3</sup> ООО "KAMIN-KLASSIK", Kaluga

**Abstract.** A new mathematical model for the diffusion of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide electron beam in a homogeneous semiconductor target of finite thickness is considered. Quantitative estimates of the dependence of the solution on the right side of the differential equation are obtained. The possibilities of using this model in electron-probe technologies of semiconductors are discussed.

**Key words:** electrons, semiconductors, minority charge carriers, diffusion, qualitative assessments, correctness

В полупроводниковом материаловедении при проведении исследований материалов в качестве информативного часто регистрируется сигнал, связанный с генерацией и диффузией в полупроводниковой мишени неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) [1, 2] и/или регистрируются сигналы, характеристики которых существенно зависят от распределения ННЗ, например, катодoluminesцентное излучение, возникающее при излучательной рекомбинации ННЗ [3, 4]. Для компьютерного моделирования диффузии ННЗ, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале исторически (см. [4] и литературу там же) и до сих пор довольно часто на практике используется т.н. модель коллективного движения ННЗ. Математически это выражается в том, что в качестве функции генерации ННЗ в правую часть дифференциального уравнения диффузии входит функция, описывающая концентрацию ННЗ во всём объёме полупроводника, пропорциональная плотности потерь энергии электронами пучка в мишени. Моделирование диффузии ННЗ также может быть описано с использованием т.н. модели независимых источников, согласно кото-



рой сначала рассматривается диффузионный процесс ННЗ, генерированных в каждом микрообъёме полупроводника, а искомое распределение ННЗ после их диффузии  $\Delta p(x, y, z)$  находится суммированием распределений от каждого из микрообъёмов. Идея такого подхода предложена в [5], а её реализация для однородных мишеней достаточно подробно описана в [4]. Отметим, что эта модель была предложена для описания диффузии ННЗ, генерированных электронным пучком в многослойной планарной полупроводниковой мишени и такой подход был реализован нами для двух- [6, 7] и трёхслойных [8, 9] структур. Этот подход можно отнести к численно-аналитическим, в то же время для решения таких задач проводилось и изучение использования методов прикладной математики – см., например, [10–12]. Однако изучение корректности математических моделей тепломассопереноса в электронно-зондовых технологиях и получение количественных оценок для рассматриваемых процессов выполнялось весьма редко [13–15]. Детальное рассмотрение модели коллективного движения ННЗ показало целесообразность её модификации, что и составляет предмет рассмотрения в настоящей работе. Рассмотрен процесс одномерной диффузии ННЗ в однородных мишенях конечной толщины, который реализуется при использовании широких электронных пучков.

**Теорема.** Пусть  $u_1$  – решение уравнения

$$D d^2 \Delta p(z) / dz^2 - \Delta p(z) / \tau = -\rho(z) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$D d \Delta p(0) / dz = v_{s_1} \Delta p(0), \quad D d \Delta p(l) / dz = v_{s_2} \Delta p(l). \quad (2)$$

а  $u_2$  – решение уравнения  $D d^2 \Delta p(z) / dz^2 - \Delta p(z) / \tau = -\rho(z) - \varepsilon$  с этими же граничными условиями; здесь  $\varepsilon$  – сколь угодно малое положительное число. Тогда для всех  $0 \leq z \leq l$  и  $v_{s_1} \neq v_{s_2}$  справедлива оценка  $|u_2(z) - u_1(z)| \leq C \exp(\sqrt{\sigma} z) + \tau \varepsilon$ ;  $D, \tau, v_{s_1}, v_{s_2}, \sigma, C = \text{const}$ .

Показано, что при  $v_{s_1} = v_{s_2}$  задача (1), (2) некорректно поставлена. Обсуждаются возможности модификации этой модели для её использования в электронно-зондовых технологиях.

### Библиографический список

1. Электроннозондовые методы исследования полупроводниковых материалов и приборов / С. Г. Конников, А. Ф. Сидоров. – М.: Энергия, 1978. – 136 с.
2. Scanning electron microscopy and X-ray microanalysis / J. I. Goldstein, D. E. Newbury, J. R. Michael, N. W. Ritchie, J. H. J. Scott, D. C. Joy. – New York Inc.: Springer-Verlag, 2018. – 550 p. – ISBN:978-1-4939-6674-5.
3. Cathodoluminescence microscopy of inorganic solids / B. G. Yacobi, D. B. Holt. – New York, London: Plenum Press, 1990. – 292 p. – ISBN 0-306-43314-1.
4. Количественная катодолуминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники: Дис. д-ра физ.-мат. наук (01.04.07) / М. А. Степович – М.: Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 2003. – 351 с.
5. Van Roosbroeck, W. Injected current transport in semi-infinite semiconductor and determination of lifetimes and surface recombination velocities / W. Van Roosbroeck // J. Appl. Phys. – 1955. – V. 26 (1). – P. 380–387.
6. Stepovich, M. A. The model of independent sources using for calculation of distribution of minority charge carriers, generated in two-layer semiconductor by electron beam / M. A. Stepovich, A. G. Khokhlov, M. G. Snopova // Proc. SPIE. – 2004. – V. 5398. – P. 159–165.
7. Степович, М. А. Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком / М. А. Степович, М. Г. Снопова, А. Г. Хохлов // Прикладная физика. – 2004. – № 3. – С. 61–65.

8. Burylova, I. V. Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy-layer semiconducting structure by a wide electron beam / I. V. Burylova, V. I. Petrov, M. G. Snopova, M. A. Stepovich // ФТП. – 2007. – Т. 41. – Вып. 4. – С. 458–461.
9. Снопова, М. Г. Анализ модели распределений неосновных носителей заряда, генерированных в трехслойной полупроводниковой структуре широким электронным пучком / М. Г. Снопова, И. В. Бурылова, В. И. Петров, М. А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2007. – № 7. – С. 47–52.
10. Макаренков, А. М. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области / А. М. Макаренков, Е. В. Серегина, М. А. Степович // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57. – № 5. – С. 801–813. – DOI: 10.7868/S0044466917050076.
11. Kalmanovich, V. V. On the Possibility of a Numerical Solution of the Heat and Mass Transfer Problem with the Combined Matrix&Generalized Powers of Bers Method / V. V. Kalmanovich, E. V. Seregina, M. A. Stepovich // Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – V. 1163. – Art. No. 012012. – DOI: 10.1088/1742-6596/1163/1/012012.
12. Серегина, Е. В. Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре / Е. В. Серегина, В. В. Калманович, М. А. Степович // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры – 2019. – Т. 172. – С. 108–116.
13. Туртин, Д. В. О корректности математических моделей диффузии и катодолуминесценции / Д. В. Туртин, М. А. Степович, В. В. Калманович, А. А. Картанов // Таврический вестник информатики и математики. – 2021. – № 1 (50). – С. 81–100. – DOI: 10.37279/1729-3901-2021-20-1-81-100.
14. Степович, М. А. О моделировании и качественном анализе процессов диффузии, обусловленной широкими электронными пучками в однородных полупроводниковых мишенях / М. А. Степович, Д. В. Туртин, В. В. Калманович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2022. – № 10. – С. 88–92. DOI: 10.31857/S1028096022080179.
15. Туртин, Д. В. О корректности одной модельной задачи тепломассопереноса в однородных полупроводниковых мишенях / Д. В. Туртин, В. В. Калманович, М. А. Степович // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2022. – Т. 206. – С. 133–137. – DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-133-137.

### Благодарности

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-10069).

### Информация об авторах

**Степович Михаил Адольфович** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры физики и математики Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского. E-mail: m.stepovich@mail.ru.

**Туртин Дмитрий Витальевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры фундаментальной математики Ивановского государственного университета. E-mail: turtin@mail.ru.

**Калманович Вероника Валерьевна** – старший преподаватель кафедры физики и математики Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского. E-mail: v572264@yandex.ru.

**Картанов Артем Алексеевич** – инженер-программист ООО «КАМИН-Классик». E-mail: kartanovartem@gmail.com.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПОДГОТОВКИ КОМПЬЮТЕРНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ТЕКСТОВ, ВЫПОЛНЕННЫХ ЛАЗЕРНОЙ ГРАВИРОВКОЙ

В. Я. Столяров, С. А. Гордин

*Комсомольский-на-Амуре Государственный Университет, Комсомольск-на-Амуре*

**Аннотация.** В наши дни цифровая обработка изображений это – достаточно серьезное направление использования современной компьютерной техники. Проблемы распознавания изображений кроме классической задачи распознавания фигур заданной формы на изображении ставят новые задачи распознавания линий и углов на изображении, распознавания края изображения. В данной исследовательской работе авторы решали проблему локализации текста на изображении при различных углах поворота.

**Ключевые слова:** обработка изображений перед распознаванием, математическая морфология, лазерная гравировка, преобразование Хафа, динамическое определения угла поворота изображения

## MATHEMATICAL METHODS AND ALGORITHMS FOR COMPUTER IMAGE PREPARATION IN THE RECOGNITION OF TEXTS MADE BY LASER ENGRAVING

V.Ya. Stolyarov, S.A.Gordin

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure

**Abstract.** Currently, digital image processing is a fairly serious requirement for the use of modern computer technology. The problems of image recognition, in addition to the classical task of recognizing shapes of a given shape in an image, pose new problems of recognizing lines and angles in an image, recognizing the edge of an image. In this research work, the authors solved the problem of text localization in an image at different rotation angles.

**Key words:** image processing before recognition, mathematical morphology, laser engraving, Hough transform, dynamic determination of the image rotation angle

В промышленном производстве ежегодно возрастает необходимость в прикладном программном обеспечении, способном считывать и однозначно идентифицировать текстовые области на бирках, маркировках и шильдиках деталей, используемых при производстве оборудования. Поскольку на перечисленные объекты активно эксплуатируются, изображения текстовых идентификаторов, принимаемых в качестве входных данных для распознавания в системах компьютерного зрения, обладают не лучшим качеством. Наиболее важных отечественных учёных, способствовавших развитию анализа изображений, стоит отметить П. А. Чочи, С. Ю. Желтова, Д. С. Лебедева, Б. М. Миллера, Ю. В. Визильтера, Ю. И. Журавлева, В. Л. Арлазарова, В. А. Сойфера и М. М. Бонгарда, а среди зарубежных – К. Шапиро, Р. Дериша, Г. Финлейсона и Б. Хорна.

При реальном производстве, подавляющее число маркировок, надписей и других текстовых идентификаторов выполняется с использованием технологии лазерной гравировки на металле. Цветовые данные, направление вектора цветности, угол отклонения от главной оси, обладание шероховатостями на металлической поверхности делают локализацию текстовой области маркировок при считывании и компьютерном анализе достаточно трудоемкой задачей. В следствие этого возникает необходимость в проектировании (или оптимизаций) методик обработки изображений до того, как они будут переданы в

стандартный модуль распознавания текста (OCR) в системах компьютерного зрения. Детектирование области изображения, которая содержит текст – есть один из важнейших этапов предварительной обработки изображений.

Таким образом, исходя из вышеперечисленного, ежедневно растет интерес к методикам, использующихся при распознавании печатных, рукописных, а так же выполненных лазерной гравировкой текстам [1–5], методы и алгоритмы, существующие на данный момент, с завидной регулярностью повторно анализируются и становятся лучше с позиций решения задач распознавания, обнаружения и поиска смысла различной текстовой информации на видеозаписях и изображениях [1; 6–8]. Огромное множество алгоритмов различного рода, базирующихся на эксплуатации локальных специфик изображений нашли применение в качестве решения к задачам локализации текста. Алгоритмами такого рода являются алгоритмы SWT [9] и MSER [10]. Предлагаемая методика основывается на других подходах нежели алгоритмы SWT и MSER. Базовые этапы предложенной методики представлены на рис. 1.

Входным параметром метода является дискретное изображение размерностью  $M \times N$  пикселей. Стоит отметить, что алгоритм считается работоспособным только для изображений, состоящих только из оттенков серого, следовательно на первом этапе важно конвертировать полученное цветное изображение в полутоновое.

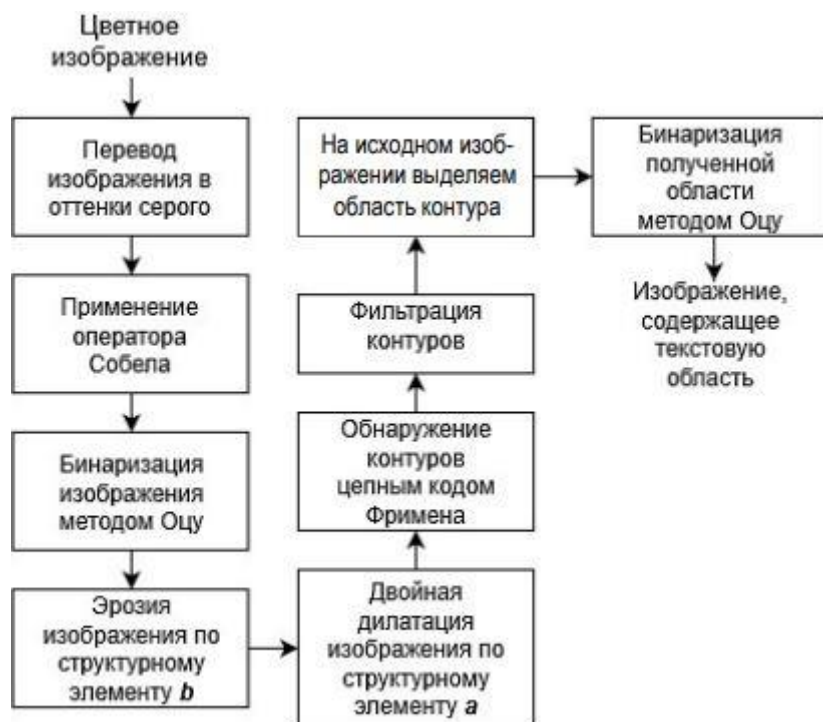


Рисунок 1 – Общая схема предложенной методики

Операции распознавания на изображениях объектов определенной формы, чаще всего, снабжаются предварительной обработкой изображений для создания условий, повышающих эффективность и качество выделения и распознавания искомых или изучаемых объектов. При выделении текстовой области на изображении вышеописанным подходом было выяснено, что при повороте детали на угол более 20–25° возникают проблемы выделения текстовой области, обусловленные тем, что предложенный автором алгоритм, основанный на методах математической морфологии, не является изотропным из-за того, что дифференцирование проводится только в горизонтальном направлении.

В качестве предварительной обработки изображений перед распознаванием используется авторский метод математической морфологии, а в случае отклонения детали на изображении свыше 20° – авторская методика, которая основывается на предварительном анализе областей изображений, построении пространства Хафа, на основе которого определяется

угол отклонения бирки с лазерной гравировкой от горизонтального положения на изображении.

Математические методы и алгоритмы подготовки компьютерного изображения при распознавании текстов, выполненных лазерной гравировкой реализованы в виде программного комплекса, опробованного в различных предметных областях в режиме реального времени.

### Библиографический список

1. Кузьмицкий, Н. Н. Обнаружение фрагментов текста на изображениях реальных сцен на базе свёрточной нейросетевой модели / Н. Н. Кузьмицкий // Информатика. – 2015. – №2(46). – С. 12–21.
2. Yin, X.-C. Multi-orientation scene text detection with adaptive clustering / X.-C. Yin, W.-Y. Pei, J. Zhang, H.-W. Hao // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2015. – V. 37. – I. 9. – P. 1930–1937. – DOI: 10.1109/TPAMI.2014.2388210.
3. Zuo, Z.-Y. Multi-strategy tracking based text detection in scene videos / Z.-Y. Zuo, S. Tian, X.-C. Yin // 13<sup>th</sup> International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR). – 2015. – P. 66–70. – DOI:10.1109/ICDAR.2015.7333727.
4. Koo, H. I. Scene text detection via connected component clustering and nontext filtering / H. I. Koo, D. H. Kim // IEEE Transactions on Image Processing. – 2013. – V. 22. – I. 6. – P. 2296–2305. – DOI:10.1109/TIP.2013.2249082.
5. Столяров, В. Я. Оценка эффективности применения контурной обработки к изображениям с лазерной гравировкой / В. Я. Столяров, В. А. Тихомиров // Актуальные научные исследования в современном мире: сборник Междунар. науч.-практ. конф., София, Болгария, 2018 (World of Sciens). – С. 84–88.
6. Цифровая обработка изображений: учеб. пособие / Р. Гонсалес, Р. Вудс; пер. с англ. Л. И. Рубанова, П. А. Чочиа; под ред. П. А. Чочиа. – М.: Техносфера, 2012. – 1104 с.
7. Otsu, N. A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms / N. Otsu // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1979. – V. 9. – №. 1. – P. 62–66.
8. Обработка и анализ цифровых изображений с примерами на LabView и Imaq Vision: учеб. пособие для вузов / Ю. А. Визильтер, В. А. Князь, С. Ю. Желтов; под ред. В. А. Мовчан. – М.: ДМКПресс, 2016. – 464 с.
9. Epshtein, B. Detecting text in natural scenes with stroke width transform / B. Epshtein, E. Ofek, Y. Wexler // Proceedings of International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2012. – P. 2963–2970.
10. Neumann, L. A method for text localization and recognition in real-world images / L. Neumann, J. Matas // 10<sup>th</sup> Asian conference on Computer vision. – 2012. – P. 770–783.

### Информация об авторах

**Столяров Виталий Яварович** – старший преподаватель кафедры «Проектирование, управление и разработка информационных систем» Комсомольского-на-Амуре государственного университета. E-mail: stolayrov.vitalij@list.ru.

**Гордин Сергей Александрович** – канд. техн. наук, доцент кафедры Прикладная математика Комсомольского-на-Амуре государственного университета. E-mail: gordin@knastu.ru.

## ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ ВРАЧЕБНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СНИЖЕНИЯ РИСКОВ В ПОЛИФАРМАКОТЕРАПИИ

В. А. Судаков<sup>1,2</sup>, Т. В. Сивакова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», Москва

**Аннотация.** Статья посвящена разработке системы поддержки принятия врачебных решений при назначении лекарственных препаратов пациенту с целью снижения ошибок и повышения качества оказываемой медицинской помощи.

**Ключевые слова:** система поддержки принятия врачебных решений, полифармакотерапия, пациент, лекарственные препараты

## APPLICATION OF MEDICAL DECISION SUPPORT SYSTEMS TO REDUCE RISKS IN POLYPHARMACOTHERAPY

V. A. Sudakov, T. V. Sivakova

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow  
Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

**Abstract.** The article is devoted to the development of a system for supporting medical decision-making when prescribing drugs to a patient in order to reduce errors and improve the quality of medical care provided.

**Key words:** medical decision support system, polypharmacotherapy, patient, drugs

Увеличение риска развития нежелательных реакций при одновременном применении нескольких лекарственных препаратов без учета индивидуальных особенностей пациента – одна из наиболее актуальных проблем современного здравоохранения. Среди медицинских задач, решаемых при помощи информационных технологий, важнейшее место занимает снижение ошибки при назначении лекарств [1]. Многим пациентам, в первую очередь пожилым и с хроническими заболеваниями приходится принимать одновременно несколько лекарственных препаратов, что вызывает опасения по поводу безопасности, поскольку выраженный синергизм или антагонизм между ними может привести к серьезным побочным эффектам или даже к летальному исходу. Это является предпосылками для разработки систем поддержки принятия врачебных решений (СППВР) применительно к лекарственным средствам и основанных на системном подходе, учитывающем объединение лекарственных препаратов при нескольких сопутствующих заболеваниях, рис. 1.



Рисунок 1 – Заболеваемость населения по основным классам болезней, данные на 30.11.2021 [2]

Созданные человеком сопоставления с предложениями, основанными на наилучших методах лечения и данных о пациентах, известны как системы, основанные на знаниях. Системы, основанные на обучении, используют методы интеллектуального анализа данных, статистики и машинного обучения для отображения системы. Интегрированная поддержка принятия решений включает в себя как системы знаний, так и системы обучения для решения информационной проблемы при частичном наличии информации в реалистичной ситуации. Эти усилия направлены на оказание медицинской помощи врачам при назначении лекарственных средств. Анализируется база знаний пациентов, чтобы назначить лекарство, однако, если предоставленные данные не являются полными, то тогда используются подходы машинного обучения, такие как средние, медианные, статистические и регрессионные расчеты [3, 4].

Предполагается, что разрабатываемая СППВР будет включать в себя следующие основные модули: модуль взаимодействия с лекарственными средствами (изучает более безопасные и эффективные представления лекарств на основе взаимодействий); модуль принятия медицинских решений и модуль медицинской поддержки.

В рамках реализации СППВР предполагается решение следующих задач: создание методологии снижения рисков полифармакотерапии; разработка методики, критериев и показателей выбора алгоритмов снижения рисков полифармакотерапии; исследование и разработка онтологий медицинских данных по лекарственным препаратам для последующего применения технологий обработки Больших данных; разработка унифицированной структуры базы данных по лекарственным препаратам; информационное наполнение базы данных; векторное представление основных специфических понятий в фармакологии (эмбединги), определяющих эффективность и побочные действия лекарственных препаратов, разработка графовых баз знаний на основе онтологий и эмбедингов; создание архитектуры СППВР при снижении рисков полифармакотерапии [5, 6].

СППВР поможет решить врачу выстроить тактику при назначении лекарственных препаратов:

- в расчете дозировок и курсе лечения;
- учитывать противопоказания к применению конкретных лекарств;
- оценивать возможность межлекарственных взаимодействий;
- предупреждать о побочных действия лекарств;
- просчитывать риски при выборе нескольких лекарственных и проводить сравнения их между собой;
- проверять и контролировать на соответствие рекомендациям и лекарственным формулярам.

СППВР будет реализована как облачная платформа, допускающая интеграцию с внешними источниками данных, в т.ч. и с распределенными базами данных. СППВР будет использовать компоненты с открытыми исходными кодами, что обеспечит независимость от зарубежных производителей программного обеспечения.

Система предполагает обучение моделей и их регулярное дообучение на новых данных о межлекарственных взаимодействиях.

### **Библиографический список**

1. Результаты опроса врачей-пульмонологов: готовы ли они к внедрению клинических рекомендаций? / В. В. Шкарин, В. Д. Заклякова, О. Н. Родионова [и др.] // Волгоградский научно-медицинский журнал. – 2022. – Т. 19. – № 2. – С. 43–47.
2. Заболеваемость населения по основным классам болезней. Доступно в Интернете: <https://rosstat.gov.ru/folder/13721> (дата обращения: 12.04.2023).
3. Cheng, F. Machine learning-based prediction of drug-drug interactions by integrating drug phenotypic, therapeutic, chemical, and genomic properties. / F. Cheng, Z. Zhao // Journal of the American Medical Informatics Association. – 2014. – V. 21 (e2). – DOI: 10.1136/amiajnl-2013-002512.

4. Белозеров, И. А. Исследование моделей машинного обучения для сегментации медицинских изображений / И. А. Белозеров, В. А. Судаков // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2022. – № 37. – С. 15. – DOI: 10.20948/prepr-2022-37.

5. Sudakov, V. Implementing the graph model of the spread of a pandemic on GPUS / V. Sudakov, N. Yashin // CEUR Workshop Proceedings. – 2021. – V. 3041. P. 488–493. – DOI: 10.54546/mlit.2021.53.71.001.

6. Sudakov, V. A. Applying an Agent-Based Approach to Modeling COVID-19. / V. A. Sudakov, T. V. Sivakova // Lecture Notes in Networks and Systems. – 2021. – V. 232. – P. 913–919. – DOI: 10.1136/amiajnl-2013-002512.

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-75-30012, <https://rscf.ru/project/23-75-30012/>.

### **Информация об авторах**

**Судаков Владимир Анатольевич** – д-р техн. наук, доц., в.н.с. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г.н.с. ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова». E-mail: sudakov@ws-dss.com.

**Сивакова Татьяна Владимировна** – н.с. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, с.н.с. ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова». E-mail: sivakova15@mail.ru.



## О СУЩЕСТВОВАНИИ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ АГРЕГАЦИИ С ЛОГИСТИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

Ж. О. Тахиров

*Институт Математики, Ташкент*

**Аннотация.** Мы изучаем класс систем хемотаксиса с перекрестной диффузией. Используя метод диссипации энтропии и предполагая, что главным образом хемотаксическая чувствительность разделяет плотность клеток и химический сигнал, мы сначала устанавливаем существование глобальных решений с эффектами перекрестной диффузии. Глобальное существование и единственность классических решений этой системы доказывается принципом сжимающих отображений с использованием априорных оценок  $L_p$  и оценок типа Шаудера для параболических уравнений.

**Ключевые слова:** модель Келлера–Сегеля, хемотаксис, априорные оценки, глобальное решение

## ON THE EXISTENCE OF CLASSICAL SOLUTIONS OF THE AGGREGATION MODEL WITH LOGISTIC SOURCES

J. O. Takhirov

*Institute of mathematics, Tashkent*

**Abstract.** A class of systems of cross-diffusion chemotaxis is studied. Using the entropy dissipation method and assuming that chemotactic sensitivity mainly separates cell density and chemical signal, we first establish the existence of global solutions with cross-diffusion effects. The global existence and uniqueness of the classical solutions of this system is proved by the contraction mapping principle using a priori  $L_p$  estimates and Schauder-type estimates for parabolic equations.

**Key words:** Keller–Siegel model, chemotaxis, a priori estimates, global solution

Известно, что математические модели реакции-диффузии представляют собой важный класс детерминированных моделей, позволяющих качественно формализовать и количественно описать пространственно-временное динамическое поведение сложных биологических структур.

Классическая модель хемотаксиса была впервые предложена Келлером и Сегелем [1] для описания агрегации некоторых видов бактерий. Эта модель активно изучается в течение последних двадцати лет [2]. Понятие хемотаксиса используется для обозначения движения клеток к химическому источнику или от него, классифицируемого как положительный и отрицательный хемотаксис соответственно. Согласно широкому определению хемотаксиса, это исследование любого движения клетки, на которую воздействует химический градиент таким образом, что это приводит к чистому распространению вверх по градиенту хемоаттрактанта или вниз по градиенту хемо-репеллента. Примеры моделей включают процессы паттерн-агрегации, как в колониях *Salmonella typhimurium* [3], а также важные с медицинской точки зрения процессы, такие как инвазия опухоли [4] и самоорганизация во время эмбрионального развития [5].

А в работах [6, 7] была предложена модификация детерминированной математической модели реакции-диффузии бактериального кворума, учитывающая закон многофазной динамики популяции. Модель сформулирована в виде математической проблемы и описывает пространственно-временную динамику концентраций конкретных веществ, характеризу-

ющих чувство кворума у грамотрицательных бактерий. Проблема решается методом конечных элементов с использованием платформы COMSOL Multiphysics. Проведены вычислительные эксперименты по оценке концентраций ключевых веществ, характеризующих чувство кворума для бактериальных штаммов *Pseudomonas putida* в расширенном диапазоне популяционной динамики. Полученные результаты позволяют оценить пространственно-временные распределения концентраций сигнального вещества АГЛ и фермента лактоназы с учетом процессов их диффузии, генерации, естественной деградации и деградации АГЛ лактоназой.

В данной заметке представлены теоретические результаты по структурной самоорганизации в биологических системах, основанные на системах уравнений реакции-диффузии, где нелинейные члены описывают кинетику, а процессы переноса представляются изотропной диффузией. Естественным обобщением открытых диссипативных структур, описываемых моделями с нелинейной диффузией, являются системы с кросс-диффузией. Кросс-диффузия означает, что пространственное перемещение одного объекта, описываемого одной из переменных, происходит за счет диффузии другого объекта, описываемого другой переменной.

Интересной особенностью модели Келлера-Сегеля является то, что решение этой модели может разрушиться за конечное время [2]. Специалисты интенсивно изучали вопрос, как избежать взрыва клеток. Были сделаны три важных расширения модели Келлера-Сегеля: первое расширение учитывает нелинейную функцию хемотаксической чувствительности [8]; второе расширение включает нелинейную диффузию [9]; третье расширение включает логистический термин [10,11]. Нелинейная функция хемотаксической чувствительности, нелинейная быстрая диффузия и член логистического роста могут предотвратить разрушение решения [10,11]. Эти новаторские работы положили начало интенсивному математическому изучению модели Келлера-Сегеля за последние 40 лет. Они начали плодотворный и продолжающийся до сих пор период математического анализа хемотаксиса, представив новые системы уравнений с частными производными.

В данной заметке мы изучаем класс систем Келлера-Сегеля с кросс-диффузионными и логистическими членами

$$\begin{aligned} u_t - \nabla \cdot (d_1(u) \nabla u) + \nabla \cdot (x \chi(u) \nabla v) &= -au + bg(v)u, \\ x \in \Omega, \quad t > 0, \quad u_t - \nabla \cdot (d_2(v) \nabla v) &= k(v) - g(v)u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega \\ \partial u / \partial n &= \partial v / \partial n = 0 \end{aligned}$$

где  $u(t, x)$  представляет собой плотность клетки в данной области  $\Omega \subset R^n$ , а  $v(t, x)$  обозначает концентрацию химического сигнала. Динамика клеток происходит от кинетики популяции и движения, последнее состоит из диффузионного потока, моделирующего ненаправленную миграцию клеток, и адвективного потока со скоростью, зависящей от градиента сигнала, моделирующего вклад хемотаксиса.  $d_1(u)$  описывает коэффициент диффузии клеток, а  $u\chi(u)$  означает хемотаксическая чувствительность,  $d_2(v)$  коэффициент нелинейной диффузии. Важнейшим свойством системы является ее способность вызывать формирование пространственного паттерна, когда химический сигнал действует как автоаттрактант, то есть когда клетки производят и мигрируют вверх по градиенту химического сигнала;  $-a(a > 0)$  – естественная убыль популяции клеток;  $g(v) = b_1v/(1 + b_2v)(b_1 > 0; b_2 > 0)$  – скорость размножения клеток;  $k(v) = rv(1 - Kv)$  – логистический прирост скорости создания химического вещества,  $K$  – их максимальная концентрация.  $n$  – единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

Предполагается выполнение следующих условий:

1)  $d_i(\xi) > d_i 0 > 0$ , определены для любого  $\xi$  и дважды непрерывно дифференцируемы,

$d_i(\xi), d'_i(\xi)$  ограничены для всех  $\xi$ , принадлежащих замкнутому множеству,  $d''_i(\xi)$  удовлетворяют условию Гёльдера,  $i = 1, 2$ ;

2)  $\chi(u) \in C'([0, +1])$ ,  $\chi(u) \equiv 0$  for  $u \geq 1$ ,  $m > 0$ ,  $\chi'(u)$  удовлетворяют условию Гёльдера.

### Библиографический список

1. Keller, E. F. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability / E. F. Keller, L. A. Segel // J. Theoret. Biol. – 1970. – V. 26. – P. 399–415.
2. Horstmann, D. Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system / D. Horstmann, M. Winkler // J. Differential Equations. – 2005. – V. 215. – P. 52–107.
3. Woodward, D. E. Spatiotemporal patterns generated by *Salmonella typhimurium* / D. E. Woodward, R. Tyson, M. R. Myerscough, J. D. Murray, E. O. Budrene, H. C. Berg // Biophys. J. – 1995. – V. 68. – P. 2181–2189.
4. Chaplain, M. A. J. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: the role of the urokinase plasminogen activation system / M. A. J. Chaplain, G. Lolas // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2005. – V. 15. – P. 1685–1734.
5. Painter, K. J. Development and applications of a model for cellular response to multiple chemotactic cues / K. J. Painter, P. K. Maini, H. G. Othmer, // J. Math. Biol. – 2000. – V. 41. – P. 285–314.
6. Shuai, Y. Modeling of Bacterial Communication in the Extended Range of Population Dynamics / Y. Shuai, A. G. Maslovskaya, C. Kuttler // Mathematical Biology and Bioinformatics. – 2023. – V. 18. – № 1. – P. 89–104. – DOI: 10.17537/2023.18.89.
7. Shuai, Y. 2D reaction-diffusion model of quorum sensing characteristics during all phases of bacterial growth / Y. Shuai, A. G. Maslovskaya, C. Kuttler // Far Eastern Mathematical Journal. – 2022. – V. 22. – № 2. – P. 232–237.
8. Hillen, T. Global existence for a parabolic chemotaxis model with prevention of overcrowding / T. Hillen, K. Painter // Adv. Appl. Math. – 2001. – V. 26. – P. 280–301.
9. Kowalczyk, R. On the global existence of solutions to an aggregation model / R. Kowalczyk, Z. Szymaska // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V. 343. – P. 379–398.
10. Tao, Y. Global existence of classical solutions to a combined chemotaxis-haptotaxis model with logistic source / Y. Tao // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – V. 354. – P. 60–69.
11. Tello, J. T. A chemotaxis system with logistic source / J. T. Tello, M. Winkler // Comm. Partial Differential Equations. – 2007. – V. 32. – P. 849–877.

### Информация об авторах

**Тахиров Жозил Останович** – д-р физ.-мат. наук, проф., зав.отделом «Математическое моделирование нелинейных систем» Института математики АН РУз. E-mail: prof.takhirov@yahoo.com.

## О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭРЕДИТАРНОГО ПЕРЕНОСА РАДОНА В ПОДПОЧВЕННОМ ВОЗДУХЕ ПО ДАННЫМ МОНИТОРИНГА НА ПЕТРОПАВЛОВСК-КАМЧАТСКОМ ГЕОДИНАМИЧЕСКОМ ПОЛИГОНЕ

Д. А. Твёрдый<sup>1,2</sup>, Е. О. Макаров<sup>3</sup>, Р. И. Паровик<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский

<sup>2</sup> Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край

<sup>3</sup> Камчатский филиал ФГБУН ФИЦ Единая геофизическая служба РАН, Петропавловск-Камчатский

**Аннотация.** Непрерывный мониторинг вариаций объемной активности радона и поиск аномальных вариаций, является одной из эффективных методик исследования напряженно-деформированного состояния геосреды с возможностью прогноза сильных землетрясений. Показано, что за счет порядка дробной производной и квадратичной нелинейности в членах математических моделей, результаты численного моделирования лучше аппроксимируют данные радонового мониторинга на Камчатке, чем классическая модель.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, объемная активность радона, предвестники землетрясений, эффект насыщения, эредитарность, дробная производная

## ABOUT MATHEMATICAL MODELING OF HEREDITARY TRANSFER OF RADON IN THE SUBSOIL AIR ACCORDING TO MONITORING DATA ON THE PETROPAVLOVSK-KAMCHATSK GEODYNAMIC POLYGON

D. A. Tverdyi<sup>1,2</sup>, E. O. Makarov<sup>3</sup>, R. I. Parovik<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka

<sup>2</sup> Kamchatka State University Vitus Bering, Petropavlovsk-Kamchatsky

<sup>3</sup> Kamchatka branch FRC Unified Geophysical Service RAS, Petropavlovsk-Kamchatsky

**Abstract.** Continuous monitoring of variations in radon volumetric activity and the search for anomalous variations is one of the effective methods for studying the stress-strain state of the geo-environment with the possibility of predicting strong earthquakes. It is shown that due to the order fractional derivative and quadratic nonlinearity in the terms of mathematical models, the results of numerical simulation better approximate the data of radon monitoring in Kamchatka than the classical model.

**Key words:** mathematical modeling, radon volumetric activity, earthquake precursors, saturation effect, heredity, fractional derivative

Радон ( $^{222}\text{Rn}$ ) – инертный радиоактивный газ с периодом полураспада 3.85 суток, является дочерним продуктом распада радия ( $^{226}\text{Ra}$ ), который в свою очередь постоянно содержится в земной коре. Поэтому  $^{222}\text{Rn}$  поддается непрерывному мониторингу с помощью газоразрядных счётчиков. В тоже время  $^{222}\text{Rn}$ , как показали результаты многочисленных работ [1,2], может служить индикатором процессов, меняющих напряженно-деформированное состояние геосреды. В результате изменений в геосреде возникают различные вариации (аномалии) в значениях объемной активности  $^{222}\text{Rn}$  (RVA), которые ряде случаев могут предшествовать сильными землетрясениям, и являться его предвестниками [3]. Поэтому непрерывный мониторинг  $^{222}\text{Rn}$  в верхнем слое грунта в таких

сейсмоопасных регионах как Камчатка [4], представляет интерес с точки зрения разработки методики прогноза сильных землетрясений.

Для исследования динамики  $^{222}\text{Rn}$  в накопительной камере нами применяются методы математического моделирования. Будем исследовать процесс отталкиваясь от хорошо изученной и часто встречающейся [4, 5, 6] классической модели на основе ОДУ:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_0 A(t) + S^D, \quad A(0) = A_0, \quad (1)$$

которую обобщим на случай дифференциальных уравнений с производной дробного порядка [7] с начальными условиями. В такой модели процесс накопления нами описывается с помощью нелинейного уравнения Риккати [8], а эффект памяти (эредитарности) с помощью дробной производной Герасимова-Капуто постоянного порядка (эредитарная  $\alpha$  - модель):

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{A'(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma = -a(t)A(t)^2 - \lambda_0 A(t) + S^D, \quad A'(\sigma) = \frac{dA(\sigma)}{d\sigma}, \quad A(0) = A_0, \quad (1)$$

где  $A(t) \in C^2[0, T]$  – RVA  $Bq/m^3$ ;  $S^D$  – константа отвечающая за диффузионный механизм переноса  $Bq/m^3$ ;  $\lambda_0$  – кратность воздухообмена (AER)  $c^{-1}$ ;  $A_0$  – константа, определяющая значение RVA в  $t=0$  момент времени;  $T > 0$  – общее время моделирования;  $t \in [0, T]$  – текущее время моделирования;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера;  $\alpha$  – порядок дробной производной, отвечает за интенсивность процесса переноса  $^{222}\text{Rn}$ , связан с характеристиками геосреды: проницаемостью, пористостью, трещиноватостью [9, 10]. При значении  $\alpha = 1$  эредитарная  $\alpha$  - модель перейдет в классическую модель. Этот факт указывает на сохранение свойств, полученного ранее решения по классической модели (1), а также на наличие новых свойств, которые применяются к исследованию RVA в пунктах наблюдений.

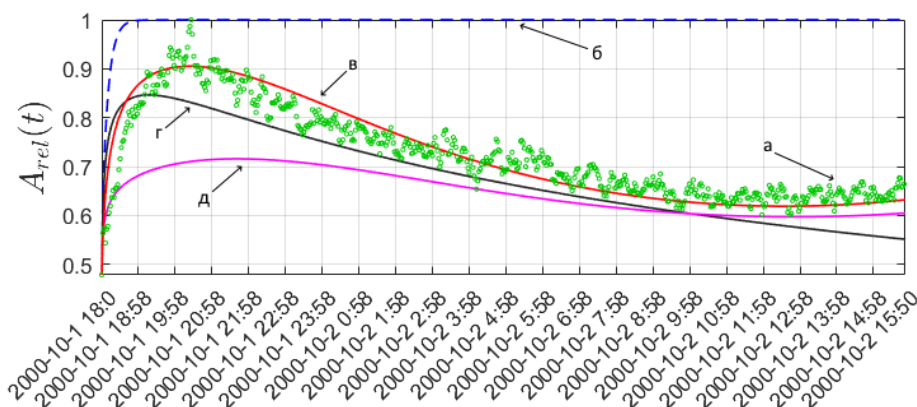


Рисунок 1 – Результаты: нормированные данные RVA (а), модельные кривые при  $\lambda_0 = S^D = 0.025$ : классической модели (б), модельные кривые по эредитарной  $\alpha$  – модели при различных значениях  $\alpha$

На рис. 1 представлены результаты численного решения уравнения в (2) в относительных единицах в сопоставлении с обработанными данными радонового мониторинга. Данные получены с газоразрядных счетчиков [11] накопительной камеры в пункте мониторинга GLLR расположенной в районе бассейна «Голубая лагуна» в районе Паратункой гидротермальной системы на Камчатке. Данные на рис.1 представляют собой информацию по  $\beta$  – излучению сопровождающему радиоактивный распад радона.

Показано что, с помощью нелинейного слагаемого в эредитарной  $\alpha$  - модели RVA (2) можно описывать различные динамические режимы RVA: быстрый рост значений RVA, далее медленный спад значений RVA с выходом на некоторое насыщение.

### Библиографический список

1. Эманионный мониторинг геосред и процессов / В. П. Рудаков. – М.: Научный

мир, 2009. – 175 с. – ISBN: 978-5-91522-102-3.

2. Barberio, M. D. Diurnal and Semidiurnal Cyclicity of Radon ( $^{222}\text{Rn}$ ) in Groundwater, Giardino Spring, Central Apennines, Italy / M. D. Barberio, F. Gori, et al. // *Water*. – 2018. – V. 10 (9). – DOI: 10.3390/w10091276.

3. Imme, G. Radon as earthquake precursor / G. Imme, D. Morelli // In book: *Earthquake Research and Analysis - Statistical Studies, Observations and Planning*. – 2012. – DOI: 10.5772/29917.

4. Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения / П. П. Фирстов, Е. О. Макаров. – Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2018. – 148 с. – ISBN: 978-5-7968-0691-3.

5. Vasilyev, A. V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room / A. V. Vasilyev, M. V. Zhukovsky // *Journal of Environmental Radioactivity*. – 2013. – V. 124. – DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014.

6. Dubinchuk, V. T. Radon as a precursor of earthquakes: In *Proceedings of the Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption (Vienna, Austria, 9–12 September 1991 г.)*. – Vienna: International atomic energy agency. – 9–22 p.

7. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с. – ISBN: 5-9221-0440-3.

8. Математическое моделирование неклассической теории эманационного метода / Р.И. Паровик. – Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2014. – 80 с. – ISBN: 978-5-7968-0452-0.

9. Tverdyi, D. A. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation / D. A. Tverdyi, R. I. Parovik // *Fractal and Fractional*. – 2022. – V. 6 (1:23). – DOI: 10.3390/fractalfract6010023.

10. Tverdyi D. A. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber / D. A. Tverdyi, E. O. Makarov, R. I. Parovik // *Mathematics*. – 2023. – V. 11 (4:850). – DOI: 10.3390/math11040850.

11. Makarov, E. O. Instrumental complex for registration concentration of subsurface gas to find precursory anomalies strong earthquake of Southern Kamchatka / E. O. Makarov, P. P. Firstov, V. N. Voloshin // *Seismic instruments*. – 2012. – V. 48.

### Благодарности

Исследования выполнены в рамках гранта Президента РФ МД-758.2022.1.1 по теме «Развитие математических моделей дробной динамики с целью исследования колебательных процессов и процессов с насыщением».

### Информация об авторах

**Твёрдый Дмитрий Александрович** – канд. физ.-мат. наук, н.с. международной интегративной научно-исследовательской лаборатории экстремальных явлений Камчатского государственного университета им. Витуса Беринга, н.с. Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: tverdyi@ikir.ru.

**Макаров Евгений Олегович** – канд. физ.-мат. наук, в.н.с. международной интегративной научно-исследовательской лаборатории экстремальных явлений Камчатского государственного университета им. Витуса Беринга, с.н.с. Камчатского филиал ФГБУН ФИЦ Единая геофизическая служба РАН. E-mail: ice@emsd.ru.

**Паровик Роман Иванович** – д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий международной интегративной научно-исследовательской лабораторией экстремальных явлений Камчатского государственного университета им. Витуса Беринга, в.н.с. Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: romanparovik@gmail.com.

## ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДРОБНОЙ ДИНАМИКИ

Д. А. Твёрдый, Р. И. Паровик

*Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
Паратунка, Камчатский край*

**Аннотация.** Математическое моделирование нелинейных процессов дробной динамики ресурсоёмкая задача, где возникает необходимость в параллельных алгоритмах решения в том числе на супер-ЭВМ. Приводится анализ эффективности разработанных алгоритмов, реализующих схемы численного решения нелинейного уравнения с дробной производной типа Герасимова-Капуто переменного порядка. Показан существенный рост производительности для явной и неявной параллельных схем в сравнении с последовательными.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, эрeditarность, дробная производная, параллельные алгоритмы, OpenMP, CUDA, суперкомпьютеры

## ON EFFICIENCY OF PARALLEL ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF SOME MODEL PROBLEMS OF FRACTIONAL DYNAMICS

D. A. Tverdyi, R. I. Parovik

*Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,  
Paratunka, Kamchatka region*

**Abstract.** Mathematical modeling nonlinear processes of fractional dynamics is a resource-intensive task where is a need for parallel solution algorithms, including on supercomputers. Given analysis efficiency of the developed algorithms that implement schemes for the numerical solution of a nonlinear equation with a fractional derivative of the Gerasimov-Caputo type of variable order. Is shown significant increase performance for explicit and implicit parallel schemes in comparison with sequential ones.

**Key words:** mathematical modeling, heredity, fractional derivative, parallel algorithms, OpenMP, CUDA, supercomputers

Как показывают исследования последних лет некоторые процессы можно моделировать при помощи элементов теории интегро-дифференциального [1, 2] исчисления. Всё чаще находятся их приложения в задачах диффузии и химии [3] или моделировании сложных акустических колебаний [4] и многих других. Хотя исследователи всё ещё испытывают трудности с пониманием явного физического смысла дробных производных, всё же это не теоретический изыск математиков. В частности, с помощью дробных производных можно описывать эффект памяти динамической системы [5, 6].

Для математического описания процессов с насыщением с эффектом памяти [7] нами рассматривается в качестве модельного уравнение Риккати с дробной производной переменного порядка типа Герасимова-Капуто. Задача Коши для рассматриваемой модели имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}} d\sigma + a(t)u^2(t) - b(t)u(t) - c(t) = 0, \quad \dot{u}(\sigma) = \frac{du(\sigma)}{d\sigma}, \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

где  $u(t) \in C^2[0, T]$  – функция решения;  $T > 0$  – общее время моделирования;  $t \in [0, T]$  – текущее время моделирования;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера;  $\alpha$  – порядок дробной

производной, отвечает за интенсивность моделируемого процесса переноса. При значении  $\alpha = 1$  получим ОДУ Риккати.

Как показано в [7] задача (1) может быть применима для описания таких динамических процессов как: динамика солнечной активности, динамика распространения COVID-19 [8] и моделировании вариаций объёмной активности радона (RVA) в накопительной камере [9] в следствии переноса радона в геосреде [10].

Задача (1) решается численно при помощи методов конечно-разностных схем и замены дробной производной её дискретными аналогами. Ранее авторами в [11] предложены: нелокальная явная конечно-разностная схема (EFDS), нелокальная неявная конечно-разностная схема (IFDS), где также подробно изучены вопросы, связанные с устойчивостью, сходимостью и аппроксимацией данных схем.

И если для теоретических исследований [7, 11] было достаточно реализации схем в системе компьютерной алгебры Maple, то для дальнейшего практического применения в моделировании RVA возникает необходимость в быстрых параллельных алгоритмах [12] реализующих EFDS и IFDS в том числе на супер-ЭВМ. В данном исследовании были реализованы параллельные алгоритмы EFDS и IFDS на языке C с помощью OpenMP [13] а также графических вычислений при помощи CUDA [14].

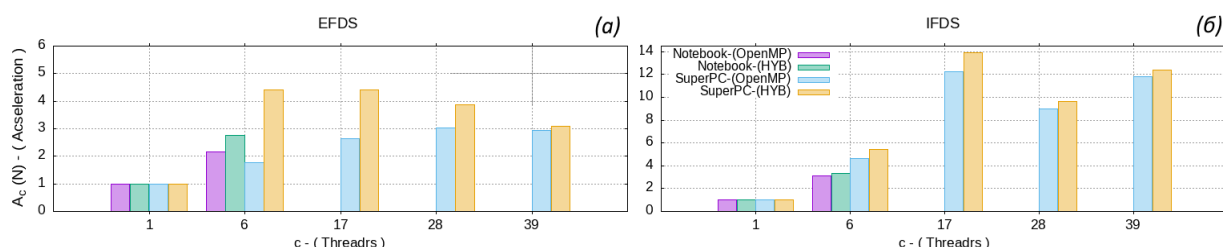


Рисунок 1 – Результаты анализа: ускорение вычислений при использовании параллельных алгоритмов в сравнении с наилучшим последовательным: EFDS (а), IFDS (б)

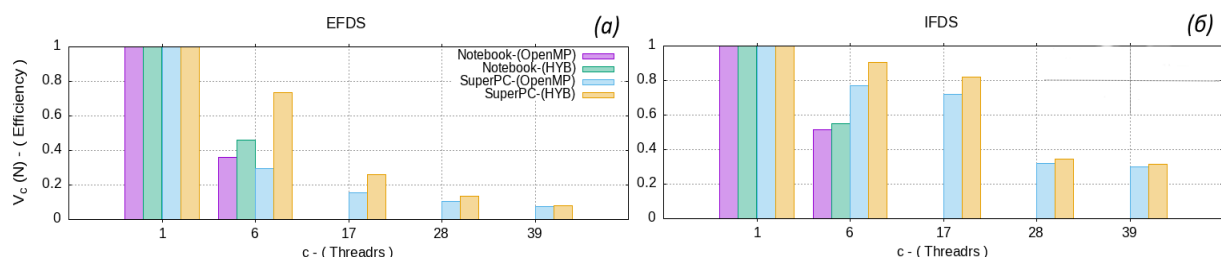


Рисунок 2 – Результаты анализа: эффективность распараллеливания численных схем в сравнении с наилучшими последовательными: EFDS (а), IFDS (б)

Для разработанных параллельных алгоритмов проведен анализ эффективности в терминах: время работы, ускорение, эффективность и стоимость алгоритма. Данные алгоритмы были запущены на 2 различных компьютерных системах: домашнем игровом ноутбуке и супер-ЭВМ. На рис. 1 видно, что имеется существенный прирост производительности: в 3-13 раз для IFDS и 3-5 раз для EFDS при различных методах программной реализации. Однако как видно из рис. 2, при запуске расчетов на более чем 20 потоках не даёт прироста производительности.

### Библиографический список

1. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier Science Limited, 2006. – 204 p. – ISBN: 9780444518323.
2. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с. – ISBN: 5-9221-0440-3.
3. Aslam, M. Fractal fractional derivative on chemistry kinetics hires problem / M. Aslam,



- M. Farman, H. Ahmad [et al.]. // AIMS Mathematics. – 2021. – V. 7 (1). – DOI: 10.3934/math.2022068.
4. Fellah, M. Transient ultrasound propagation in porous media using Biot theory and fractional calculus: Application to human cancellous bone / M. Fellah, Z. E. A. Fellah, F. Mitri [et al.]. // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2013. – V. 133 (4). – DOI: 10.1121/1.47927213.
5. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations / V. Volterra. – New York: Dover publications, 1959. – 226 p.
6. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 510 с. – ISBN: 9785904198015.
7. Tverdyi, D. A. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect / D. A. Tverdyi, R. I. Parovik // Fractal and Fractional. – 2022. – V. 6 (3:163). – DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
8. Tverdyi, D. A. Fractional Riccati equation to model the dynamics of COVID-19 coronavirus infection / D. A. Tverdyi, R. I. Parovik // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – V. 2094. – DOI: 10.1088/1742-6596/2094/3/032042.
9. Tverdyi, D. A. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber / D. A. Tverdyi, E. O. Makarov, R. I. Parovik // Mathematics. – 2023. – V. 11 (4:850). – DOI: 10.3390/math11040850.
10. Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения / П. П. Фирстов, Е. О. Макаров. – Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2018. – 148 с. – ISBN: 978-5-7968-0691-3.
11. Tverdyi, D. A. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation / D. A. Tverdyi, R. I. Parovik // Fractal and Fractional. – 2022. – V. 6 (1:23). – DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
12. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем: учебное пособие / В. П. Гергель. – М.: Издательство МГУ, 2010. – 544 с. – ISBN: 5-85746-602-4.
13. Практикум по параллельному программированию: учебное пособие / В. П. Гергель. – Санкт-Петербург: БХВ, 2017. – 236 с. – ISBN: 978-5-9909805-0-1.
14. CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming / J. Sanders, E. Kandrot. – London: Addison-Wesley Professional, 2010. – 310 p. – ISBN: 978-0-13-138768-3.

### Благодарности

Исследования выполнены в рамках гранта РФФИ № 22-11-00064 по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

### Информация об авторах

**Твёрдый Дмитрий Александрович** – канд. физ.-мат. наук, н.с. Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: tverdyi@ikir.ru.

**Паровик Роман Иванович** – д-р физ.-мат. наук, проф., в.н.с. Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. E-mail: romanparovik@gmail.com.

## ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД И КРОССОВЕРЫ СИСТЕМЫ ИЗИНГ-ПОДОБНЫХ ДИПОЛЕЙ НА КАИРСКОЙ РЕШЕТКЕ

И. В. Трефилов, Э. А. Лобанова, П. А. Овчинников, В. С. Стронгин, Ю. А. Шевченко

*Департамент теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТУПМ ДВФУ,  
Владивосток  
Институт Прикладной Математики, ДВО РАН, Владивосток*

**Аннотация.** В данной работе на основе проведенных ранее исследований [1], изучаются пики теплоёмкости с целью определить являются ли они признаками фазового перехода на каирской решетке диполей Изинга, а также зависимость пиков теплоемкости от размера решетки.

**Ключевые слова:** каирская решетка, алгоритм Метрополиса, теплоемкость, аппроксимация

## PHASE TRANSITION AND CROSSOVERS OF THE SYSTEM OF ISING-LIKE DIPOLES ON THE CAIRO LATTICE

I. V. Trefilov, E. A. Lobanova, P. A. Ovchinnikov, V. S. Strongin, Yu. A. Shevchenko

*Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University,  
Vladivostok*

*Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Science, Vladivostok*

**Abstract.** In this paper, based on previous studies [1], heat capacity peaks are studied to determine whether they are signs of a phase transition on the Cairo lattice of Ising dipoles, as well as the dependence of heat capacity peaks on the size of the lattice.

**Key words:** cairo lattice, Metropolis algorithm, heat capacity, approximation

Мы исследуем физику спинового льда магнитных Изинг-подобных диполей на каирской пентагональной 2D решетке используя численный алгоритм Метрополиса и метод исчерпывающего перечисления. Точечные диполи расположены на ребрах решетки, вектор магнитного момента направлен вдоль ребра решетки, используется диполь-дипольная модель взаимодействия. Было обнаружено наличие двух явных пиков в температурном поведении теплоемкости и магнитной восприимчивости. Низкотемпературный пик обусловлен только дальнедействующими взаимодействиями, высокотемпературный пик обусловлен взаимодействиями только между ближайшими соседями [1].

Косвенным доказательством наличия фазового перехода в магнитной системе является расхождение значения теплоемкости в пике при  $N \rightarrow \infty$ . Для изучения критических явлений и фазовых переходов необходимо точно определять температуру максимума теплоемкости и ее значение в пике.

Каирская решетка является двумерной периодической кристаллической структурой (рис. 1). Названа в честь города Каира, где ее впервые обнаружили в декоративном узоре мозаики.

Один из основных используемых алгоритмов – алгоритм Метрополиса. Алгоритм Метрополиса – это стохастический алгоритм Монте-Карло для генерации выборок из заданного распределения вероятностей. Алгоритм применяется для исследования систем, которые могут быть представлены в виде множества состояний, где каждое состояние имеет свою

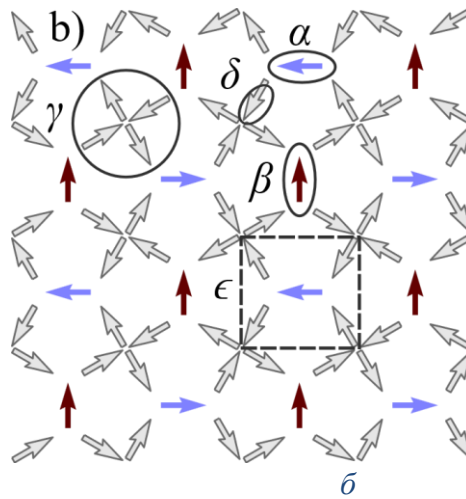


Рисунок 1 – Каирская решетка

вероятность, он позволяет получить случайные выборки из этого распределения, что позволяет свойства системы, которые зависят от ее состояния.

В данной работе изучение проводилось на каирских решетках с размерами: 8x8, 10x10, 12x12, 16x16, 20x20, 24x24, 28x28, 32x32, 34x34, 36x36, 44x44, 48x48, 52x52, 64x64 элементарных ячеек с количеством спинов  $n \cdot 5$ . С помощью алгоритма Метрополиса найдены значения теплоемкости для решетки 14x14 в логарифмическом диапазоне от  $5 \cdot 10^{-5}$  до  $1 \cdot 10^{-5}$ . Для нахождения максимума, по данным решетки вычисляется теплоемкость в диапазонах температур:  $[6.0e-05, 8.0e-05]$  – низкотемпературный пик,  $[5.5e-03, 6.5e-03]$  – высокотемпературный пик. Полученные данные пиков аппроксимируются с помощью метода наименьших квадратов (рис. 2). Используя полученные данные построены графики  $T_{peak}(N)$ ,  $C_{peak}(N)$  для обоих пиков. На графике видно, что аппроксимируемая кривая улучшает значения для дальнейшего изучения, сглаживая данные (рис. 3, 4). Для достаточного обоснования фазового перехода в пиках необходимо продолжить исследования с решетками большей размерности.

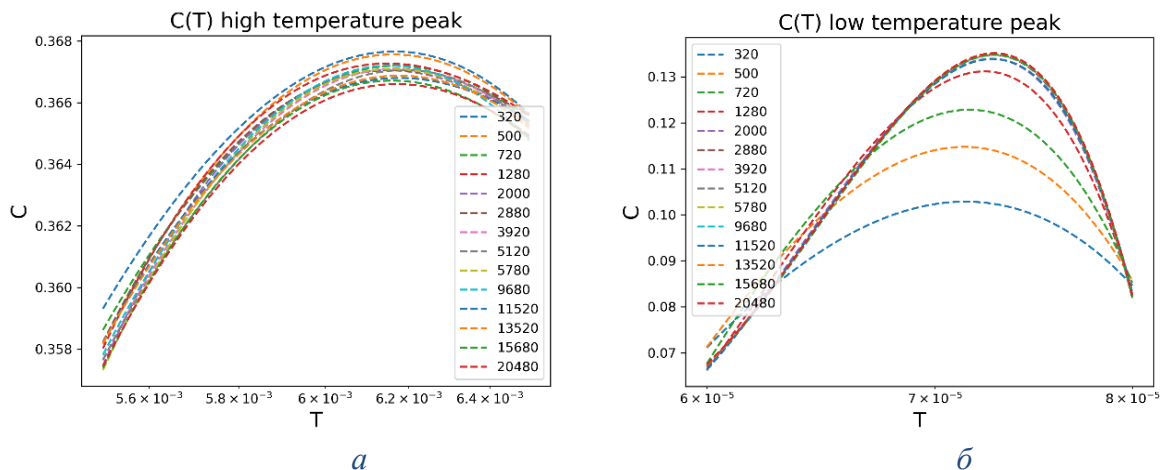


Рисунок 2 – Теплоемкость высокотемпературных пиков (а), низкотемпературных (б)

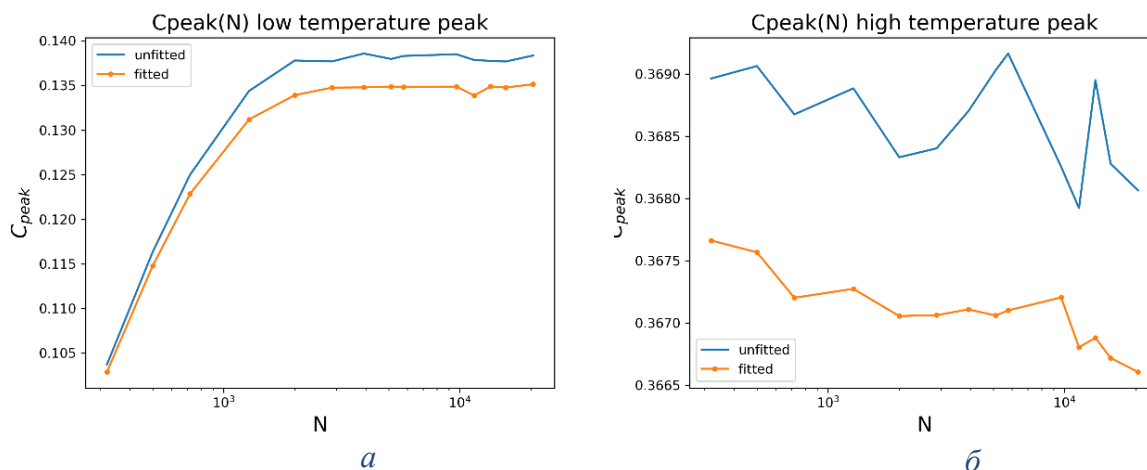


Рисунок 3 – Графики  $C_{peak}(N)$  низкотемпературного пика (а), высокотемпературного пика (б). Желтая линия - аппроксимированная кривая, синяя - кривая по исходным точкам

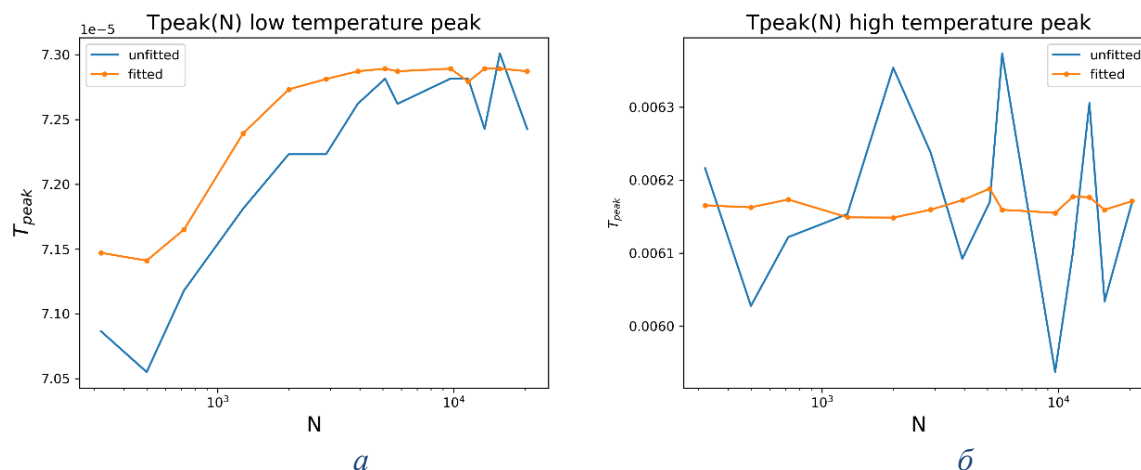


Рисунок 4 – Графики  $T_{peak}(N)$  низкотемпературного пика (а), высокотемпературного пика (б). Желтая линия – аппроксимированная кривая, синяя – кривая по исходным точкам

### Библиографический список

1. Shevchenko, Y. Order and disorder, crossovers, and phase transitions in dipolar artificial spin ice on the Cairo lattice / Y. Shevchenko. Et al // Physical Review E. – 2022. – V. 106. – №. 6. – P. 064105.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 23–22–00328).

### Информация об авторах

**Трефилов Иван Викторович** – магистрант 1-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: trefilov.iv@students.dvfu.ru.

**Лобанова Элиза Александровна** – студент 1-го курса, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: lobanova.eal@students.dvfu.ru.

**Овчинников Павел Алексеевич** – магистрант 1-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: ovchinnikov.pa@dvfu.ru.

**Стронгин Владислав Сергеевич** – аспирант 1-го года обучения, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: strongin.vs@dvfu.ru.

**Шевченко Юрий Андреевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТиПМ ДВФУ. E-mail: shevchenko.ya@dvfu.ru

## ФОРМИРОВАНИЕ НАБОРА ДАННЫХ (ДАТАСЕТА) ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПАВОДКОВЫХ ЯВЛЕНИЙ НА РЕКЕ АМУР

П. А. Ухов, М. Б. Булакина, С. С. Крылов

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт», Москва*

**Аннотация.** В работе представлены алгоритмы подготовки данных о гидрологической обстановке и метеорологических измерений для последующего прогнозирования паводковых явлений на реке Амур алгоритмами машинного обучения. Рассмотрены вопросы получения гидрологической информации, метеорологических данных и параметров атмосферы региона, а также алгоритмы предварительной обработки данных на основе поиска аномалий во временных рядах и статистических подходов. По итогам работы сформирован набор данных (датасет).

**Ключевые слова:** Амур, Зея, dataset, аномалии, машинное обучение

## DATASET FORMATION TO STUDY FLOOD EVENTS ON THE AMUR RIVER

P. A. Ukhov, M. B. Bulakina, S. S. Krylov

Moscow Aviation Institute, Moscow

**Abstract.** The paper presents algorithms of preparing data on the hydrological situation and meteorological measurements for the subsequent prediction of flood events on the Amur River by machine learning algorithms. The issues of obtaining hydrological information are considered. Meteorological data and atmospheric parameters of the region were analyzed. Algorithms for data preprocessing based on the anomaly detection in time series and statistical approaches are proposed. The result is a dataset.

**Key words:** Amur river, Zeya river, dataset, anomalies, machine learning

В настоящее время сбор и обработка гидрологических данных по рекам в Российской Федерации осуществляется Федеральной службой по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды и соответствующими организациями [1]. Несмотря на обилие ресурсов большинство из них носят сводный характер и не представляют интереса для формирования наборов данных (датасетов) гидрологической информации. Наибольший интерес представляют массивы срочных данных метеорологических наблюдений, которые содержат информацию о качестве данных [2]. Однако, по гидрологической информации региона реки Амур открытые ресурсы фактически отсутствуют. Хотя такие данные, как уровни воды, расходы и температура воды собираются и существуют оперативные информационные системы, содержащие указанную информацию за последние 7 дней на действующих гидрологических постах сети Росгидромета [3]. Последние представляют интерес для построения систем прогнозирования, однако имеют ряд специфических особенностей обновления (не оперативно обновляются в выходные и праздничные дни, кроме того, период в 7 дней часто недостаточен для работы моделей на базе алгоритмов машинного обучения).

Существуют также региональные системы [5], которые содержат полезную информацию об уровнях опасных явлений для каждого из гидрологических постов. На указанном портале указаны следующие уровни опасности для каждого из гидропостов, которые важны для анализа метрики F1-score задач прогнозирования паводковых явлений:

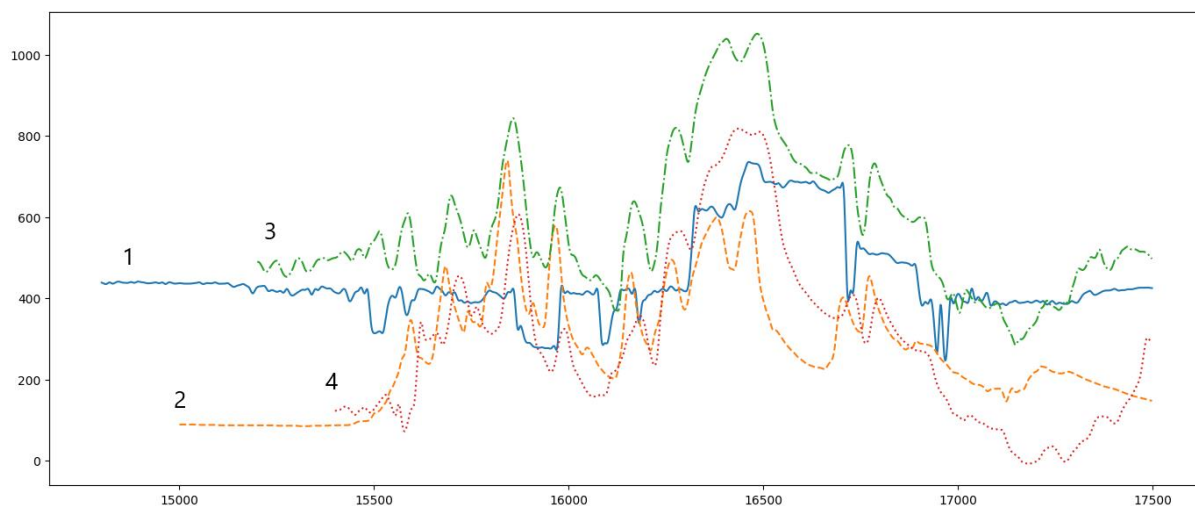


Рисунок 1 – Уровни воды, полученного набора данных для 2013 года по гидропостам:  
 1 – р. Зея, Зареченская Слобода, 2 – р. Селемджа, Усть-Ульма,  
 3 – р. Зея, Малая Сазанка, 4 – р. Зея, г. Благовещенск

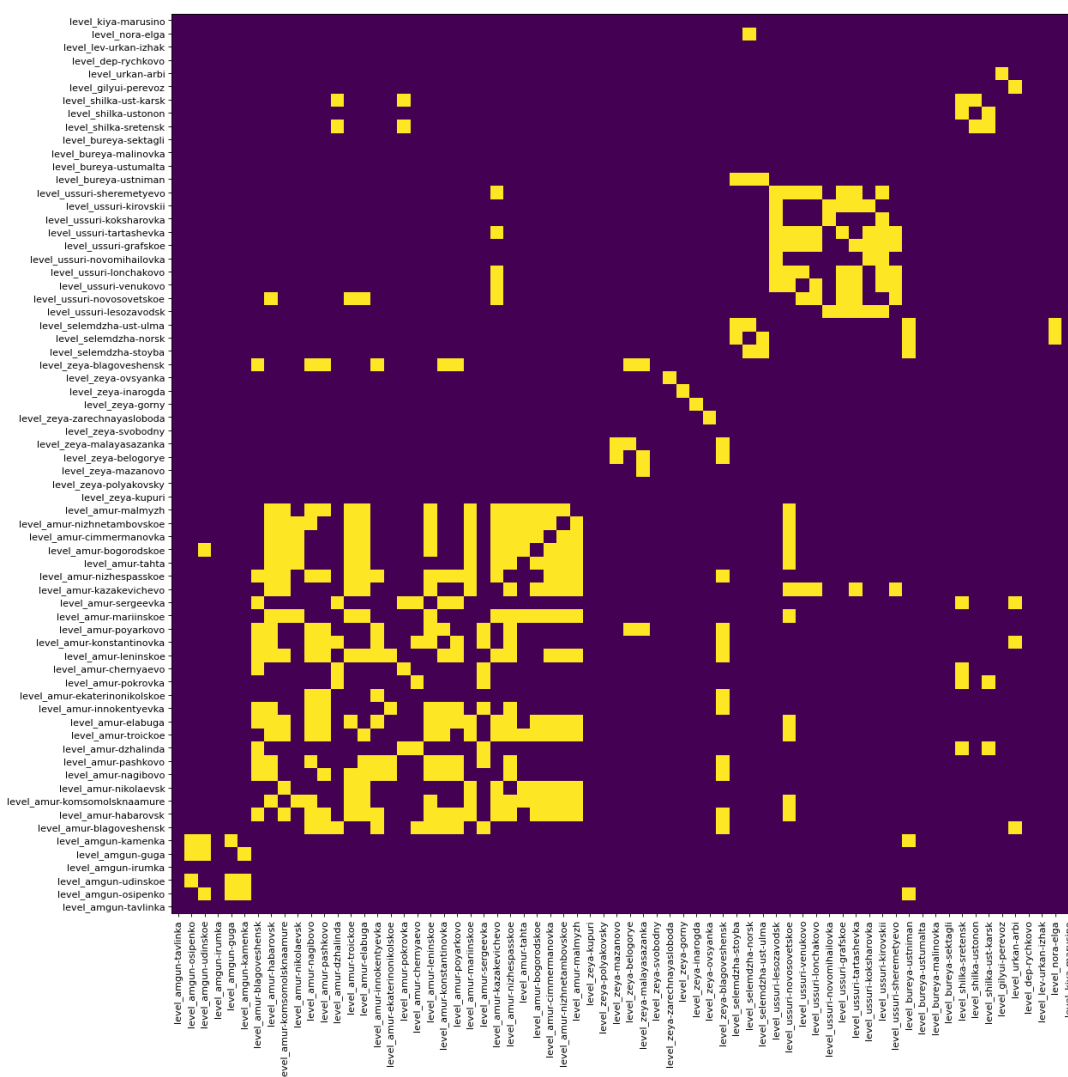


Рисунок 2 – Анализ корреляции показаний уровня на гидропостам региона (выделены гидропосты с сильной корреляционной зависимостью –  $k > 0.8$ )

Уровень опасного явления – превышение которого наносит большой материальный ущерб или представляет угрозу здоровью и жизни людей.

Критический уровень – с превышением которого начинается затопление и нанесение материального ущерба.

Уровень неблагоприятного явления – ниже уровня опасного явления, но его превышение также значительно затрудняет деятельность отдельных отраслей хозяйства и наносит ущерб экономике и населению.

Кроме официальных источников данных, были использованы архивы соревнования AI Journey под эгидой Сбер, на котором присутствовала задача по прогнозированию паводков на р. Амур. Данные были подготовлены совместно МЧС, Минприроды и Росгидрометом [4]. Также данные были дополнены информацией одного из наиболее полных ресурсов [6], который содержит возможность получения временных рядов гидрологических постов за всю историю наблюдений.

В работе были проанализированы различные источники данных, заполнены пропуски в данных на основе интеллектуального алгоритма, учитывающего корреляции между показаниями различных гидропостов региона. Все данные приведены к формату 8-ми срочных наблюдений с шагом по времени в 3 часа. На рис.1 представлены данные уровней воды на реке Зея для 2013 года. При обработке данных и удаления аномальных значений были учтены вопросы регулирования сброса на Зейском водохранилище.

По итогам проведенной работы сформирован датасет, включающий: список гидропостов с координатами и критическими уровнями воды; список метеостанций с координатами; уровни воды для гидропостов; параметры метеорологических наблюдений на метеостанциях, значимые для решения задачи прогнозирования паводковых явлений.

### **Библиографический список**

1. Информационные ресурсы Росгидромета, Том 1, Межрегиональные территориальные управления по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды. – Обнинск, ФГБУ «ВНИИГМИ-МЦД», 2011 г. – 226 с.
2. Специализированные массивы для климатических исследований / В. М. Веселов, И. Р. Прибыльская, О. А. Мирзеабасов. – ВНИИГМИ-МЦД, 2022 г. – URL: <http://aisori-m.meteo.ru/>.
3. Esimo.ru. Наборы данных: RU\_RIHMI-WDC\_1325, RU\_RIHMI-WDC\_1329. Доступно в Интернете: <http://esimo.ru/portal/portal/esimo-user/services/hydro> (дата обращения: 23.03.2023).
4. Набор данных и описание задачи NoFloodWithAI: прогнозирование паводков на реке Амур. Доступно в Интернете: [https://github.com/ai-forever/no\\_flood\\_with\\_ai\\_aij2020](https://github.com/ai-forever/no_flood_with_ai_aij2020) (дата обращения: 23.03.2023).
5. ГИС «Метео ДВ» – Геоинформационный портал Дальневосточного региона РФ. Доступно в Интернете: <https://meteo-dv.ru/gis.html> (дата обращения: 23.03.2023).
6. AllRivers Уровень воды онлайн. Доступно в Интернете: <https://allrivers.info> (дата обращения: 23.03.2023).

### **Информация об авторах**

**Ухов Петр Александрович** – канд. техн. наук, доц., зам. начальника управления «ИТ-Центр» МАИ. E-mail: [ukhov79@gmail.com](mailto:ukhov79@gmail.com), [ukhovpa@mai.ru](mailto:ukhovpa@mai.ru).

**Булакина Мария Борисовна** – канд. техн. наук, доц., начальник управления «ИТ-Центр» МАИ. E-mail: [maria.b.bulakina@gmail.com](mailto:maria.b.bulakina@gmail.com).

**Крылов Сергей Сергеевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., директор института №8 «Компьютерные науки и прикладная математика» МАИ. E-mail: [compgra@yandex.ru](mailto:compgra@yandex.ru).

## ИССЛЕДОВАНИЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ СПИНОВЫХ СТЕКОЛ

М. А. Чесноков, И. Н. Наливайко, К. В. Нефедев

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** В работе представлен подход к исследованию низкоэнергетических состояний спиновых стекол. Объектом исследования выступают низкоэнергетические кластеры в энергетической матрице систем с низкой энергией при изменении  $J$ . Для расчетов используется частичный перебор и жадный алгоритм.

**Ключевые слова:** спиновые стекла, основное состояние, плотность состояний, жадный алгоритм, модель Изинга

## THE RESEARCH OF LOW-ENERGY STATES OF SPIN GLASSES

M. A. Chesnokov, I. N. Nalivaiko, K. V. Nefedev

Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Abstract.** This paper presents an approach to the study of low-energy states of spin glasses. The object of study is low-energy clusters in the energy matrix of low-energy systems with changing  $J$ . Partial brute force and a greedy algorithm are used for calculations.

**Key words:** spin glasses, ground state, density of states, greedy algorithm, Ising model

Спиновые стекла – это спиновые системы, проявляющие свойства, как и ферромагнетиков, так и антиферромагнетиков по причине конкуренции обменных взаимодействий между собой. Спиновые стекла изучаются уже длительное время (модель спинового стекла Эдвардса-Андерсона опубликована в 1975 г.), однако до сих пор их физические свойства изучены не достаточно хорошо. Возможно, необходимо двигаться в сторону разработки компьютерных алгоритмов для решения задачи об области определения функции дискретных переменных. Исследования состояния спинового стекла вызывают большой интерес, ведь эффективные алгоритмы для расчета статистической суммы, позволяющей получить такой важный показатель, как плотность состояний, или хотя бы для поиска минимальной энергии – отсутствуют [1].

Поиск конфигурации с минимально возможной энергией системы, называемой основным состоянием, является, пока неразрешимой задачей для всей сферы статистической физики спиновых систем. Все существующие на данный момент алгоритмы называются приближенными, поскольку они позволяют найти решение за полиномиальное время, но с определенной погрешностью. Основной проблемой, не позволяющей использовать точные переборные методы, является экспоненциальный рост числа конфигураций с увеличением количества взаимодействующих моментов. Для получения статистически значимого результата необходима система из, как минимум, тысяч частиц, тогда как точные переборные методы становятся бесполезными уже для  $>40$  частиц.

Для численных расчетов спиновых стекол используется с для взаимодействия с ближайшими соседями Эдвардса-Андерсона [2]. В ней у каждого спина в решетке есть, максимум, по 4 соседа, а общая энергия системы рассчитывается по формуле (1):

$$H_J = - \sum_{\langle x, y \rangle} J_{xy} \cdot s_x \cdot s_y, \quad (1)$$



где  $s_x$  и  $s_y$  – это спины, принимающие значения -1 и 1, а  $J$  – константа обменного взаимодействия, знак которой (в нашем случае) независимо выбирается случайным образом [3]. Значение  $J$  лежит в границах от -1 до 1.

Цель состоит в разработке алгоритма поиска низкоэнергетических состояний в системах спиновых стекол, анализ низкоэнергетических конфигураций при изменении  $J$ . Для оценки данного параметра мы следим за динамикой изменения низкоэнергетических кластеров в энергетической матрице, получаемой при применении формулы ко всем спинам в системе.

На первом этапе генерируется распределение  $J$ . Так как мы не имеем другой возможности найти плотность состояния кроме использования неточных методов, используется «урезанный» полный перебор. Плотность состояний – это характеристика, показывающая сколько раз конфигурация с определенной энергией  $E$  и определенным спиновым избытком  $M$  (разница между кол-вом спинов «вниз» и «вверх») встречается в системе. Данный параметр позволяет рассчитать статсумму и дает полную информацию о возможном поведении системы при внешнем воздействии. Если конфигурация с одинаковым  $E$  и  $M$  встречается больше 1 раза ( $g$  больше единицы), то такое состояние системы называют вырожденным.

Зная распределение  $J$  и значения GEM (плотность состояний –  $g$ ,  $E$ ,  $M$ ) возможно найти основное состояние или близкое к нему с помощью жадного алгоритма, позволяющего быстро «снизить» энергию системы, путем совершения наиболее энергетически эффективных перестановок (переворотов спинов). Жадный алгоритм редко позволяет дойти до основного состояния, останавливаясь (исчерпывая возможности к уменьшению энергии при перевороте) на близком значении. Использование заранее известных  $E$  и  $M$  позволяют увеличить шанс найти основное состояние или подойти ближе.

Алгоритм работает следующим образом: на каждом шаге внешнего цикла поиска генерируется «пустая» конфигурация (например, для системы из 47 частиц это будет 47 спинов «вверх»), после чего случайным образом спины переворачиваются так, чтобы соответствовать  $M_{\min}$ , после этого, рассчитывается общая энергия системы, запускается внутренний цикл, в котором работает жадный алгоритм; как только он опускает энергию систему до энергии основного состояния  $E_{\min}$  или очень близкой к ней (что допускается в больших системах), внутренний цикл завершается. Чтобы  $M$  в конфигурации, которую меняет жадный алгоритм, всегда была равна  $M_{\min}$ , на каждом шаге жадного алгоритма попарно переворачиваются спин «вверх» и спин «вниз», таким образом  $M$  в системе остается постоянным. Чем больше система, тем больше допущение относительно «попадания» жадного алгоритма в  $E_{\min}$ , иными словами, для уменьшения времени вычисления допускается небольшая погрешность. В случае не сильно вырожденного основного состояния находятся все существующие конфигурация основного состояния, однако, в противном случае их число ограничивается, например, 50 уникальными конфигурациями, чтобы также уменьшить время вычисления.

После нахождения и сохранения конфигураций, вычисляется энергетическая матрица, в ней рассчитываются кластеры низких энергий. Далее, рассчитывается отношение размера самого большого кластера (в небольших системах он чаще всего один, в системах побольше – несколько) относительно размера системы. Пример результата для fbc представлен на рис. 1:

Каждая точка - отношение размера (кол-ва частиц) низкоэнергетического кластера и полного числа частиц в системе для каждой уникальной конфигурации основного состояния, кроме тех случаев, когда основное состояние сильно вырождено (об этом допущении писалось выше). Использовались системы 25, 36, 49 и 64 спинов.

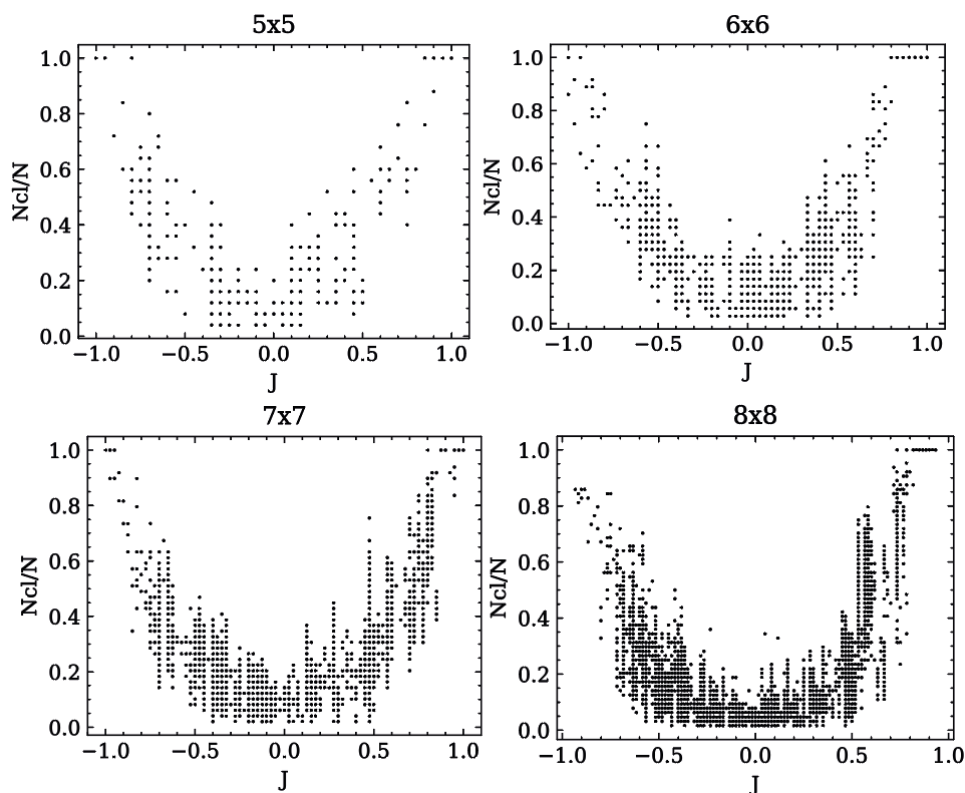


Рисунок 1 – Полученный результат для fbc граничных условий

Планируется провести вычисления для решеток большего размера, добавить результаты для pbc граничных условий. Полученные графики нужно проанализировать. Также программу нужно ускорить, поскольку задача отлично подходит для распараллеливания путем использования технологии CUDA.

### Библиографический список

1. Newman, C. M. Ground-state stability and the nature of the spin glass phase / C. M. Newman, D. L. Stein // *Physical Review E*. – 2022. – V. 105. – №. 4. – P. 044132.
2. Edwards, S. F. Theory of spin glasses / S. F. Edwards, P. W. Anderson // *Journal of Physics F: Metal Physics*. – 1975. – V. 5. – №. 5. – P. 965.
3. Makarova K. Canonical Monte Carlo multispin cluster method / K. Makarova et al // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2023. – V. 427. – P. 115153.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2559.2022.1.2).

### Информация об авторах

**Чесноков Михаил Алексеевич** – E-mail: chesnokov.ma@dvfu.ru.

**Наливайко Игорь Николаевич** – E-mail: nalivaiko.in@dvfu.ru.

**Нефедев Константин Валентинович** – E-mail: nefedev.kv@dvfu.ru.

## ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ САМООРГАНИЗАЦИИ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

С. В. Чупров

*Байкальский государственный университет, Иркутск*

**Аннотация.** С позиций статистической физики подверженная влиянию случайных воздействий индустриальная система в той или иной степени содержит хаос, порождаемый разного рода возмущениями. Представляет интерес конструирование статистической модели самоорганизации этой системы под углом зрения протекающих в ней энтропийно-информационных процессов. Излагается краткий анализ построенной модели с формулированием условий и выводов в отношении изменения порядка и самоорганизации индустриальной системы.

**Ключевые слова:** информация, индустриальная система, модель, организованность, порядок, самоорганизация, хаос, энтропия

## THEORETICAL AND INFORMATIONAL ANALYSIS OF THE MODEL OF THE SELF-ORGANISATION OF AN INDUSTRIAL SYSTEM

S. V. Chuprov

Baikal State University, Irkutsk

**Abstract.** From the standpoint of statistical physics, an industrial system subject to the influence of random influences contains chaos to one degree or another, generated by various kinds of disturbances. It is of interest to construct a statistical model of the self-organization of this system from the point of view of the entropy-information processes occurring in it. A brief analysis of the constructed model is presented with the formulation of conditions and conclusions regarding the change in the order and self-organization of the industrial system.

**Key words:** information, industrial system, model, organization, order, self-organization, chaos, entropy

Энтропийно-информационная парадигма хаотических процессов служит источником развития классических представлений об организованности и эффективности экономических систем. Известно, что хаос нарушает взаимодействия в ней, вносит разлад в поведение системы и снижает полезный результат ее функционирования. В воззрениях о самоорганизующихся системах находит применение постулат шенноновской теории информации [1] об относительной энтропии или избыточности, которую Г. Ферстер [2, с. 122] обосновал для описания порядка  $R$  в системе:

$$R = 1 - \frac{H}{H_m}, \quad (1)$$

где  $H$  – энтропия источника информации;  $H_m$  – максимально возможная энтропия источника информации.

В этом теоретико-информационном контексте величина  $R$  сообщает об устраненной неопределенности поведения системы и, если представить, что в исходном положении система находилась в хаотичном состоянии с максимальной энтропией  $H_m$ , количество извлеченной или введенной информации  $I$  определится разностью:

$$I = H_m - H, \quad (2)$$

а выражение (1) можно поэтому развернуть в следующем виде:

$$R = 1 - \frac{H}{H_m} = \frac{H_m - H}{H_m} = \frac{I}{H_m}, \quad (3)$$

Для анализа динамики величины порядка  $R$  в индустриальной системе дифференцируем выражение (3):

$$\frac{dR}{dt} = \frac{H_m \frac{dI}{dt} - I \frac{dH_m}{dt}}{H_m^2}, \quad (4)$$

и проведем обсуждение ряда особенностей изменения характеристик функции  $R$ .

1) Сначала заметим, что постоянство скорости изменения величины  $R \left( \frac{dR}{dt} = 0 \right)$  предполагает равенство нулю числителя дроби (4), т.е.

$$H_m \frac{dI}{dt} = I \frac{dH_m}{dt}.$$

Полученное равенство формализует условие обеспечения стабильности скорости изменения порядка  $R$  в индустриальной системе: скорости увеличения и уменьшения максимальной энтропии  $H_m$  и количества управляющей информации  $I$  должны быть сбалансированы с учетом их текущих значений.

2) Между тем поскольку самоорганизация индустриальной системы подразумевает повышение порядка в ней, скорость изменения величины  $R$  должна быть положительной:

$$\frac{dR}{dt} > 0$$

и, принимая во внимание формулу (4) и  $H_m^2 > 0$  в ее знаменателе, найдем неравенство:

$$H_m \frac{dI}{dt} > I \frac{dH_m}{dt}. \quad (5)$$

Таким образом, соблюдение этого соотношения означает, что в индустриальной системе происходит процесс самоорганизации, и потому неупорядоченность в ее поведении уменьшается, а порядок растет.

В стиле обзора Г. Ферстером [2] энтропийных процессов в системе изложим краткий анализ модели (5) и сформулируем вытекающие из него выводы.

3) Пусть максимальная энтропия системы остается величиной неизменной:  $H_m = const$ . Ввиду этого производная  $\frac{dH_m}{dt} = 0$ , вследствие чего для левой дроби неравенства (5) получим условие  $H_m \frac{dI}{dt} > 0$ . Налицо ожидаемый результат: при фиксированной величине максимальной энтропии самоорганизация системы растет с положительной скоростью ввода в систему управляющей информации  $I$ . Увлекаемая процессом самоорганизации, индустриальная система улучшает согласованность своих элементов благодаря насыщению их действий управляющей информацией (2), вытесняющей энтропию из системы.

4) Теперь примем, что количество управляющей информации в системе постоянно ( $I = const$ ) и потому производная  $\frac{dI}{dt} = 0$ . Ввиду этого левая часть неравенства (5) также обращается в ноль, и из него найдем условие самоорганизации индустриальной системы  $I \frac{dH_m}{dt} < 0$ . Тем самым подчеркивается необходимость убывания величины максимальной энтропии  $H_m$  системы, что означает приращение порядка в индустриальной системе благодаря внутриорганизационному «подавлению» хаоса в ней.

Понятный интерес представляет общий случай, когда допускается одновременное изменение величин  $I$  и  $H_m$  в неравенстве (5).

5) Констатируем, что последнее устанавливает универсальное свойство самоорганизующихся систем, не требуя предельных (пороговых) значений величин, но обязывающее соблюдать неравенство (5).

6) Для его левой части можем указать, что с увеличением максимальной энтропии  $H_m$  при дезорганизации индустриальной системы необходим ускоренный рост количества управляющей информации  $I$  в ней для обуздания и уменьшения нарастающей хаотизации системы.

7) С другой стороны, если реорганизацией и упорядочиванием индустриальной системы удастся добиться уменьшения ее максимальной энтропии  $H_m$ , ослабятся условия для увеличения в ней количества управляющей информации  $I$  и уровня порядка  $R$ .

Дальнейший анализ энтропийно-информационных процессов в индустриальной системе призван раскрыть влияние этих характеристик на показатели эффективности ее поведения и их устойчивость в возмущенной среде.

### **Библиографический список**

1. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 829 с.
2. Ферстер Г. О самоорганизующихся системах и их окружении / Г. Ферстер // Самоорганизующиеся системы: пер. с англ. / под общ. ред. Т. Н. Соколова. – М.: Мир, 1964. – С. 113–139.

### **Информация об авторе**

**Чупров Сергей Витальевич** – д-р экон. наук, проф., профессор кафедры менеджмента и сервиса Байкальского государственного университета. E-mail: ChuprovSV@yandex.ru.

## АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПОЛНОГО ЭЛЕКТРОННОГО СОДЕРЖАНИЯ ИОНОСФЕРЫ

А. С. Шапкин, К. О. Потапов

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

**Аннотация.** В данной работе был синтезирован алгоритм оценки абсолютного полного электронного содержания (ПЭС) ионосферы на основе результатов двухчастотных фазовых и дальностных измерений сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), сущность которого состоит в комбинировании расчётов ПЭС по фазовым и дальностным измерениям, а также в оценке и учёте ионосферных задержек, вносимых дифференциальными кодовыми задержками (ДКЗ) приёмной станции и спутника, на основе метода наименьших квадратов.

**Ключевые слова:** ионосфера, глобальная навигационная спутниковая система, полное электронное содержание, дифференциальная кодовая задержка, метод наименьших квадратов

## ALGORITHM FOR ESTIMATION OF TOTAL ELECTRONIC CONTENT OF THE IONOSPHERE

A. S. Shapkin, K. A. Patapau

The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus,  
Minsk, Republic of Belarus

**Abstract.** In this paper, an algorithm for estimation of absolute total electron content (TEC) of the ionosphere was synthesized based on the results of two-frequency phase and range measurements of global navigation satellite systems (GNSS) signals, the essence of which is to combine TEC calculations from phase and range measurements, and also in the estimation and accounting of ionospheric delays introduced by differential code biases (DCB) of the receiving station and satellite based on least squares method.

**Key words:** ionosphere, global navigation satellite system, total electron content, differential code bias, least squares method

Ионосферой называется та часть верхней атмосферы Земли, которая простирается от высоты 50 км до высот порядка от 1000 до 1500 км и заполняется частично ионизированным газом – плазмой. Важность исследования ионосферы связана как с функционированием спутниковых систем навигации и связи [1], так и с работой наземных объектов в условиях мощных магнитных бурь. Известно, что ионосфера способна изменяться под воздействием природных и антропогенных факторов. Например, аномальные временные и пространственные вариации концентраций электронов в ионосфере являются предвестниками магнитных бурь и больших землетрясений и, согласно литературным источникам, появляются за 1–10 дней до землетрясения [2].

Основной характеристикой при изучении ионосферы является ПЭС, определяемое как интеграл от электронной плотности по пути распространения волны с поперечным сечением  $1 \text{ м}^2$  между спутником и наземной станцией:

$$TEC = \int_{L_0}^L n_e(l) dl, \quad (12)$$

где  $L_0$  и  $L$  – нижняя и верхняя точки прохождения ионосферы;  $n_e(l)$  – электронная концентрация на трассе  $l$ .

Проводя измерения сигналов ГНСС на двух различных частотах, можно получить оценки ПЭС по дальностным и фазовым измерениям [3]. ПЭС, рассчитанное по фазовым измерениям, обеспечивает высокую точность, но является относительным, а рассчитанное по дальностным измерениям позволяет получить абсолютное значение, но с большой шумовой составляющей и с частотнозависимой ДКЗ аппаратуры спутника и приёмника [3]. В связи с вышеизложенным был синтезирован алгоритм оценки ПЭС на основе результатов двухчастотных фазовых и дальностных измерений.

Пусть в каждый момент времени известны фазовые (фаза несущей)  $O_1$  и  $O_2$  и дальностные (псевдодальность)  $D_1$  и  $D_2$  измерения на двух частотах  $f_1$  и  $f_2$ , угол места спутника  $\varepsilon$ , ДКЗ спутника  $DCB_s$ . Алгоритм оценки абсолютного ПЭС состоит из пяти основных шагов.

Шаг 1. Подсчёт относительного ПЭС по фазовым измерениям.

$$TEC_\psi = \frac{1}{\chi} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (O_1 \lambda_1 - O_2 \lambda_2), \quad (13)$$

где  $\chi = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e} \approx 40,308 \text{ м}^3 \text{ Гц}^2$ ;  $O_1$  и  $O_2$  – фазы несущих (в оборотах) на частотах  $f_1$  и  $f_2$ .

Шаг 2. Корректировка данных относительного ПЭС.

Отметим, что полученное по формуле (2) относительное ПЭС требуется «очистить» за счёт корректировки *разрывов* и *скачков* в значениях [1]. Скачки (*cycle slips*) и разрывы (*gaps*) представляют собой кратковременный срыв в фазовой синхронизации приёмника на спутниковый сигнал. Исправление разрывов и скачков проиллюстрировано на рис. 1.

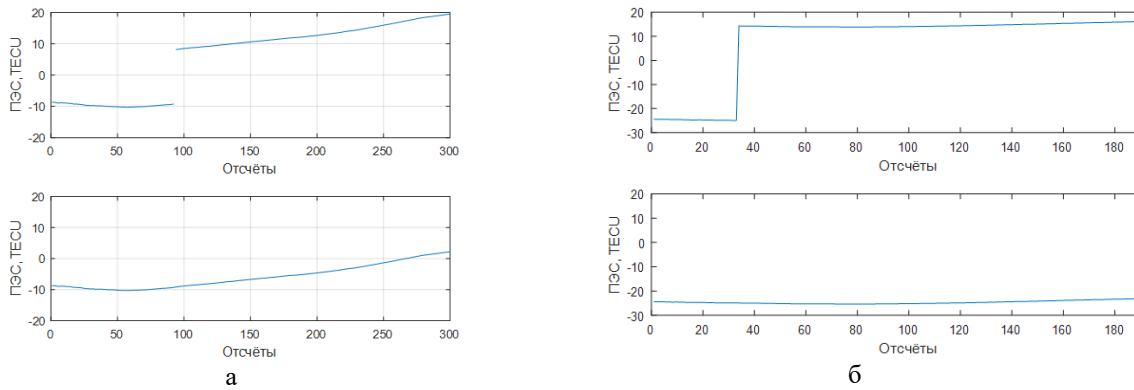


Рисунок 1 – Корректировка данных относительного ПЭС: а) исправление разрыва; б) исправление скачка

Шаг 3. Подсчёт ПЭС по дальностным измерениям.

$$TEC_D = \frac{1}{\chi} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (D_2 - D_1 + cDCB_s). \quad (14)$$

Шаг 4. Оценка абсолютного ПЭС с помощью комбинирования оценок ПЭС, полученных по фазовым и дальностным измерениям.

$$TEC_{abs} = TEC_\psi + \langle TEC_D - TEC_\psi \rangle. \quad (15)$$

Шаг 5. Уточнение оценки абсолютного ПЭС за счёт оценки ДКЗ приёмной станции на основе метода наименьших квадратов.

Шаг 5.1. Для  $k$ -ой реализации (пролета спутника) принимается предположительное значение  $DCB_r$ :

$$c'DCB_r^{k,i} = \overline{-75,75}, \quad (16)$$

где  $c' = \frac{1}{\chi} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} c$ ;  $c$  – скорость света.

Шаг 5.2. Вычисляется предположительное абсолютное вертикальное ПЭС:

$$TEC_V^{k,i} = (TEC_{abs}^k - c'DCB_r^{k,i}) M(\varepsilon, h), \quad (17)$$

где  $M(\varepsilon, h)$  – множитель для отображения наклонного ПЭС в вертикальное [4]:

$$M(\varepsilon, h) = \cos \left( \arcsin \left( \frac{R_e}{R_e + h_{\max}} \cos(\varepsilon) \right) \right), \quad (18)$$

где  $h_{\max}$  – высота максимума электронной концентрации ионосферы;  $R_e$  – радиус Земли.

Шаг 5.3. Вычисляется среднеквадратическое отклонение (СКО):

$$S_0^{k,i} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left( TEC_V^{k,i} - \overline{TEC_V^{k,i}} \right)^2}. \quad (19)$$

Шаг 5.4. Для  $k$ -ой реализации выбирается ДКЗ с минимальным СКО:

$$c'DCB_r^k = c'DCB_r^{k,i}, i = \min(S_0^{k,i}), \quad (20)$$

Шаг 5.5. В качестве ДКЗ приёмной станции выбирается среднее:

$$c'DCB_r = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c'DCB_r^k, \quad (21)$$

где  $K$  – количество реализаций.

Шаг 5.6. Получаем окончательное значение абсолютного ПЭС:

$$TEC'_{abs} = TEC_{abs} - c'DCB_r. \quad (22)$$

Упрощённо алгоритм оценки абсолютного ПЭС можно представить в графическом виде, как показано на рис. 2.

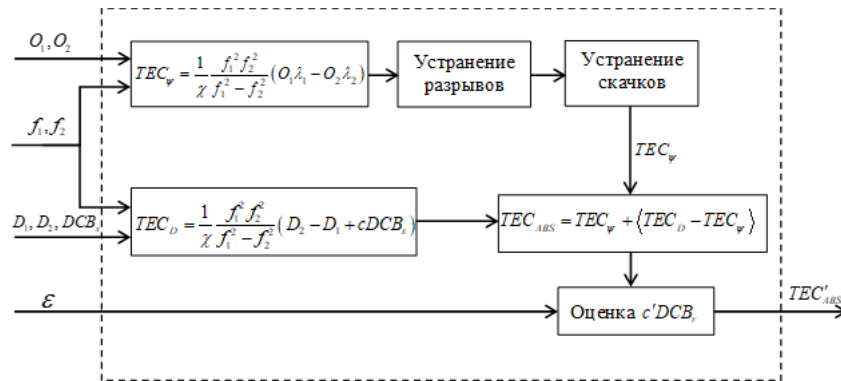


Рисунок 2 – Упрощённая блок-схема алгоритма оценки абсолютного ПЭС

Таким образом, в работе был синтезирован алгоритм оценки абсолютного ПЭС ионосферы на основе результатов двухчастотных фазовых и дальностных измерений сигналов ГНСС, который может быть использован для мониторинга состояния ионосферы для предсказания природных событий.

### Библиографический список

1. Global Positioning System: Theory and Practice / В. Hofmann-Wellenhof, Н. Lichtenegger, J. Collins. – New York: Springer-Verlag Wien, 1992. – 327 p.
2. Прогноз землетрясений возможен?! / С.А. Пулинец [и др.]. – М.: Тривант, 2014. – 144 с.
3. Радиотомография ионосферы / В. Е. Куницын, Е. Д. Терещенко, Е. С. Андреева. – М.: Физматлит, 2007. – 336 с.



4. GPS-мониторинг верхней атмосферы Земли / Э. Л. Афраймович, Н. П. Перевалова. – Иркутск: ГУ НЦ РВХ ВСНЦ СО РАМН, 2006. – 480 с.

#### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках договора № 220/12 «Разработать алгоритмические и программные средства обработки радиотомографических данных низкоорбитального контроля ионосферы» (04.05.2022–31.12.2025 гг.), заключенного с УП «Геоинформационные системы» по проекту «Разработать космическую систему радиометрического контроля околоземного пространства на базе малого космического аппарата и специализированных наземных средств» (мероприятия подпрограммы 6 «Исследование и использование космического пространства в мирных целях» Государственной программы «Наукоёмкие технологии и техника» на 2021– 2025 годы).

#### **Информация об авторах**

**Шапкин Александр Сергеевич** – аспирант, лаборатория моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси. E-mail: al\_shapkin@newman.bas-net.by.

**Потапов Кирилл Олегович** – инженер-программист, лаборатория моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, E-mail: kirillpotapovnow@gmail.com.

## ИНТЕРВАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЕ

С. П. Шарый

*ФИЦ ИВТ и Новосибирский госуниверситет,  
Новосибирск*

**Аннотация.** Работа является обзором постановок задач для интервальных уравнений и систем уравнений, их практических приложений и численных методов для их решения. Рассматриваются различные множества решений для интервальных уравнений и различные способы их оценивания в применении к типичным практическим ситуациям.

**Ключевые слова:** интервал, интервальный анализ, интервальная неопределённость, интервальное уравнение, интервальные численные методы

## INTERVAL SYSTEMS OF EQUATIONS AND THEIR SOLUTION

S. P. Shary

FRC ICT and Novosibirsk State University,  
Novosibirsk

**Abstract.** The work is an overview of problem statements for interval equations and systems of equations, as well as their practical applications and numerical methods for their solution. Considered are various solution sets for interval equations and various ways of their estimation as applied to typical practical situations.

**Key words:** interval, interval uncertainty, interval analysis, interval equation, interval numerical methods

Работа является обзором различных постановок задач для интервальных уравнений и систем уравнений, а также их практических приложений и численных методов для их решения.

Интервал на вещественной оси  $\mathbb{R}$  — это её замкнутое ограниченное и связное подмножество, т. е. замкнутый числовой сегмент. Интервалы являются одними из простейших множеств, и очень часто с их помощью можно адекватно описывать различные неопределённости и неточности задания интересующих нас физических величин. Кроме того, между интервалами можно определить операции и отношения, организовать «исчисление интервалов», что даёт начало интервальному анализу [1-9], математической дисциплине, которая использует это «исчисление интервалов» для решения конкретных задач.

Интервальное уравнение — это уравнение с одним или несколькими параметрами, которые могут принимать значения из интервалов. Интервальная система уравнений — это система уравнений описанного выше вида, рассматриваемых совместно друг с другом. Интервальные уравнения и их системы естественно возникают всюду, где мы не знаем точно некоторых параметров моделируемых явлений или они могут изменяться в пределах интервалов. Иными словами, интервальные уравнения и системы уравнений — это параметрические уравнения и их системы, имеющие параметры специального вида. Этот специальный вид и возможность выполнения на множестве интервалов различных операций и отношений делают интервальные уравнения и их системы нетривиальным и важным объектом. Он одновременно прост и достаточно содержателен, так что решение интервальных уравнений превратилось за последние десятилетия в отдельную область

современного интервального анализа с богатыми результатами и впечатляющими практическими приложениями.

Интервальные уравнения и системы уравнений возникают в практике математического моделирования как сами по себе, так и в виде вспомогательных объектов, как отдельные звенья более длинных технологических цепочек решения тех или иных задач. В частности, одним из популярных источников интервальных систем уравнений являются задачи обработки данных с интервальной неопределённостью, более точно, задачи восстановления функциональных зависимостей по неточным данным измерений и наблюдений, если эти неточности описываются интервалами (см., к примеру, [9, 10]).

В целом, интервальное уравнение можно мыслить как совокупность всевозможных точечных (неинтервальных) уравнений, параметры которых принадлежат заданным интервалам. Как правило, в связи с различными практическими задачами нас интересуют решения этих точечных уравнений (систем уравнений), но параметрической совокупности таких уравнений соответствует совокупность решений, из которых могут образовываться различные *множества решений* для интервальных уравнений и их систем.

Во многих задачах нас интересует объединение всех решений отдельных точечных уравнений (систем), его размеры и расположение в пространстве решений. Это происходит, например, при анализе чувствительности различных технических систем. Такое множество решений называется *объединённым множеством решений* для интервальных уравнений и систем уравнений. Оно было исторически первым в интервальном анализе, и в настоящее время ему посвящено, по-видимому, наибольшее количество публикаций.

Рассмотрим для определённости интервальные системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где  $A$  – интервальная  $m \times n$ -матрица,  $b$  – интервальный  $n$ -вектор. Для таких систем математически строгое определение объединённого множества решений, записанное на языке формальной теории множеств, выглядит следующим образом:

$$\Xi_{uni}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in A)(\exists b \in b)(Ax = b)\}.$$

Но объединённое множество решений не является единственно возможным для интервальных уравнений и систем уравнений. В 70-е годы прошлого века возникла необходимость рассмотрения другого множества, тоже образованного из решений отдельных точечных уравнений (или их систем), но способом, отличным от их простого объединения. Оно называется в настоящее время *допусковым множеством решений* и образовано всеми такими решениями точечных уравнений, что при любых значениях параметров левой части, взятых в пределах заданных интервалов, значение выражения левой части принадлежит интервалам правой части. Для интервальных систем линейных алгебраических уравнений выпisanного выше вида определение этого множества решений выглядит следующим образом

$$\Xi_{tol}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in A)(\exists b \in b)(Ax = b)\}.$$

Аналогично, варьированием логических кванторов при интервальных параметрах можно определить и другие множества решений для интервальных уравнений и их систем (см. [4]), хотя на практике наибольшее применение получили два описанных выше.

Наконец, помимо различных множеств решений для интервальных уравнений и систем уравнений могут быть определены так называемые *формальные решения*, которые соответствуют общематематической концепции решений уравнений. Более точно, пусть дано интервальное уравнение  $F(x) = 0$ , в котором отображение  $F$  или его компоненты являются рациональными функциями, т. е. такими, что выражение для них составлены из символов переменных, констант и четырёх арифметических операций. Интервал или интервальный вектор  $x$  называются формальными решениями этого уравнения, если подстановка его в  $F$  и выполнение всех операций, фигурирующих в  $F$ , по правилам интервальной арифметики приводят к истинному равенству  $F(x) = 0$ .

Естественно возникает вопрос о том, какой смысл имеют формальные решения интервальных уравнений. Можно ли их как-то проинтерпретировать? И если да, то как на практике находить формальные решения для интервальных уравнений и систем уравнений?

Ответы на эти вопросы положительны, и формальные решения интервальных уравнений и систем уравнений находят многочисленные приложения на практике. Например, формальное решение для системы  $Ax = b$ , если оно существует, является интервальным вектором (брусом), который содержится в допусковом множестве решений  $E_{tol}(A, b)$ . В большинстве ситуаций этот интервальный вектор даже максимален по включению. С помощью расширения множества интервалов можно распространить этот результат на внутреннее оценивание объединённого множества решений, а также на внешнее оценивание (с помощью объемлющих множеств) допускового и объединённого множеств решений. Наконец, для нахождения формальных решений интервальных уравнений и систем уравнений за прошедшие годы было предложено немало эффективных вычислительных алгоритмов.

### Библиографический список

1. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
2. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – Москва-Ижевск: «РХД», 2008. – 286 с.
3. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа / Э. Хансен, Дж. У. Уолстер. – Москва-Ижевск: «РХД», 2012. – 516 с.
4. Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2020. – 655 с. – URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf> (дата обращения: 24.04.2023 г.).
5. Interval analysis and automatic result verification / G. Mayer. – Berlin: de Gruyter, 2017.
6. Interval methods for systems of equations / A. Neumaier. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – xvi + 255 p.
7. Introduction to interval analysis / R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud. – Philadelphia: SIAM, 2009. – xi + 223 p.
8. Интервальный анализ и его приложения. Веб-сайт: <https://www.nsc.ru/interval/> (дата обращения: 24.04.2023 г.).
9. Шарый, С. П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями / С. П. Шарый // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 111–125.
10. Shary, S. P. Weak and strong compatibility in data fitting problems under interval uncertainty / S. P. Shary // Advances in Data Science and Adaptive Analysis. – 2020. – V. 12. – № 1. – P. 2050002. – DOI: 10.1142/S2424922X20500023.

### Благодарности

Автор благодарен участникам Всероссийского веб-семинара по интервальному анализу и его приложениям за плодотворные обсуждения рассмотренных в работе вопросов и конкретных численных алгоритмов.

### Информация об авторах

**Шарый Сергей Петрович** – д-р физ.-мат. наук, в.н.с. ФИЦ ИВТ, профессор кафедры математического моделирования Новосибирского государственного университета. E-mail: [shary@ict.nsc.ru](mailto:shary@ict.nsc.ru).

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАТТЕРНОВ ДЛЯ РЕАКЦИОННО-ДИФфуЗИОННОЙ МОДЕЛИ РОСТА БАКТЕРИЙ ПРИ КУЛЬТИВИРОВАНИИ НА ПИТАТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ

И. А. Шевкун, А. Г. Масловская

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** В работе представлен результат численной реализации модели формирования дендритоподобных структур бактериальных колоний при поверхностном культивировании на питательных средах. Модифицированная модель описывается начально-граничной задачей для системы реакционно-диффузионных уравнений с учетом введения стохастического механизма эволюционной деформации бактериальной колонии. Вычислительный алгоритм построен на основе неявной конечно-разностной схемы Яненко и реализован в ППП Matlab. Проведена численная оценка фрактальных характеристик границ бактериальных паттернов в предельных режимах при вариации значений управляющих параметров модели.

**Ключевые слова:** бактериальный рост, питательная среда, дендритоподобная структура, модель «реакция-диффузия», неявная конечно-разностная схема, вычислительный эксперимент, фрактальный анализ

## CHARACTERISTICS OF GEOMETRIC PATTERNS FOR A REACTION-DIFFUSION MODEL OF GROWTH OF BACTERIA CULTURED ON MEDIA

I. A. Shevkun, A. G. Maslovskaya  
Amur State University, Blagoveshchensk

**Abstract.** The paper presents the result of numerical modeling the dendritic structure formation of bacterial colonies under surface cultivation on nutrient media. The modified model is described by an initial-boundary problem for a system of reaction-diffusion equations, taking into account the introduction of a stochastic mechanism of evolutionary deformation of a bacterial colony. The computational algorithm is based on the Yanenko implicit finite-difference scheme and implemented in the Matlab. A numerical evaluation of the fractal characteristics of the boundaries of bacterial patterns is performed in limiting modes with varying values of control parameters of the model.

**Key words:** bacterial growth, nutrient medium, dendrite-like structure, “reaction-diffusion” model, implicit finite difference scheme, computational experiment, fractal analysis

В настоящее время представители микромира становятся важными объектами междисциплинарных исследований в математической биологии и биоинформатике. Использование инструментов прикладной математики позволяет прогнозировать состояния сложных микробиологических систем и их реакцию на внешние воздействия. Бактерии представляют важнейший класс микробных сообществ, поскольку их функционирование влияет на многие аспекты жизнедеятельности человека.

Классическим методом микробиологической диагностики и выявления инфекционных заболеваний является культивирование микроорганизмов с использованием специальных питательных субстратов. При определенных условиях культивации бактериальные колонии представляют собой эволюционирующие самоподобные структуры, обладающие дендритоподобным строением [1]. В настоящее время известно несколько базовых детерминированных подходов к моделированию пространственно-временной динамики бактериальной био-

массы [2–3]. Особую значимость развитие моделей бактериальной эволюции приобретает в связи со способностью многих вирулентных видов бактерий действовать коллективно благодаря межклеточной коммуникации и формировать факторы толерантности по отношению к действию антибактериальных препаратов [4]. Цель настоящей работы заключалась в оценке геометрических характеристик дендритоподобных бактериальных паттернов при поверхностном культивировании на питательных средах на основе численной реализации реакционно-диффузионной модели роста биомассы.

Базовая модель бактериального роста [2] описывает пространственно-временную динамику биомассы и формализуется в виде начально-краевой задачи для системы уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} - bn, \\ \frac{\partial b}{\partial t} = \operatorname{div}(\sigma \cdot n \cdot b \cdot \operatorname{grad}(b)) + nb, \end{cases} \quad -L < x < L, \quad -L < y < L, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где  $n(x, y, t)$  – концентрация питательного вещества,  $b(x, y, t)$  – концентрация популяции бактерий, в модифицированном подходе  $\sigma = \sigma_0(1 + \delta)$  – параметр, характеризующий концентрацию питательного вещества (чем ниже концентрация, тем выше  $\sigma_0$ ),  $\delta$  – случайная величина, характеризующая флуктуации биомассы при динамике колонии.

Начальные и краевые условия определим в следующем виде:

$$\begin{aligned} n(x, y, 0) &= n_0, \quad b(x, y, 0) = \beta_0 = \beta_m \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{C^2}\right), \quad -L < x < L, \quad -L < y < L, \\ \left. \frac{\partial n}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} &= 0, \quad \left. \frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n_0$  и  $\beta_0$  – относительные величины исходной концентрации питательных веществ и плотности бактерий соответственно,  $\beta_m$ ,  $C$  – параметры модели,  $\Gamma$  – граница расчетной области с линейным размером  $2L$ .

Для численного решения задачи использована неявная конечно-разностная схема расщепления – метод дробных шагов Яненко [3]. Алгоритм был реализован в виде прикладной программы в ППП Matlab. Проверка адекватности численного решения задачи проведена с использованием тест-примеров с известными аналитическими решениями. Установлена практическая сходимость схемы с использованием правила Рунге. При вычислениях значения случайного параметра  $\delta$  генерировались в каждом узле аппроксимации с помощью треугольного распределения в пределах  $[-\rho, \rho]$ , где  $0 \leq \rho \leq 1$ . Моделирование выполнялось при следующих нормированных значениях параметров:  $n_0=0.71$ ,  $\beta_0=0.71$ ,  $C^2=6.25$ ,  $\beta_m=0.71$ ,  $L=200$ ,  $T=2000$ ,  $N=M=1000$ ,  $K=2100$ ,  $\sigma_0=\{0.55; 1; 1.45\}$ ,  $\rho=\{0; 0.25; 0.5; 0.75; 1\}$ .

Результат численного моделирования пространственного распределения (в последний момент времени) при увеличении значения параметра  $\rho$  представлена на рис. 1. При отсутствии случайного фактора ( $\rho=0$ ) формируются симметричные конфигурации. Вариация параметра  $\rho$  позволяет моделировать реалистичные конфигурации бактериальных колоний.

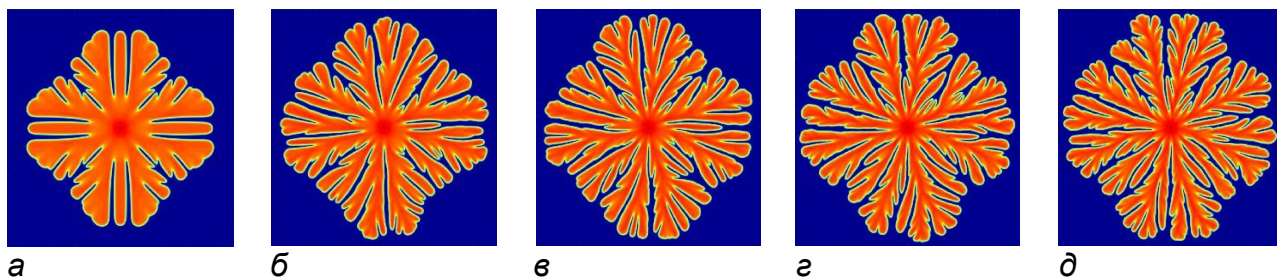


Рисунок 1 – Визуализация геометрических паттернов бактериального роста на питательной среде при  $\rho=0$  (а),  $\rho=0.25$  (б),  $\rho=0.5$  (в),  $\rho=0.75$  (г),  $\rho=1$  (д) и  $\sigma_0=1.45$

Для геометрической характеристики границ визуализируемых бактериальных паттернов используем средства фрактального анализа. Проведем численную оценку фрактальной размерности границ паттернов в последний момент времени наблюдения при вариации значений управляющих параметров модели: случайного параметра  $\rho$  и диффузионного параметра  $\sigma_0$ . Для вычисления фрактальной размерности  $D_L$  использован метод покрытий [5]. На рис. 2 представлен результат визуализации зависимости  $D_L$  от значений параметров.

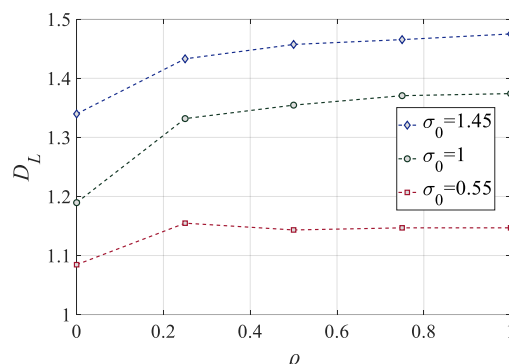


Рисунок 2 – Зависимость фрактальной размерности  $D_L$  границы колонии от параметра  $\rho$  при вариации значений диффузионного параметра  $\sigma_0$

В результате проведенных вычислительных экспериментов было выявлено, что фрактальная размерность возрастает как при увеличении случайного параметра  $\rho$ , характеризующего степень флуктуаций, так и при увеличении параметра  $\sigma_0$ , что соответствует снижению концентрации питательного вещества и усилению диффузии бактериальных клеток.

### Библиографический список

1. Xiong, L. Flower-like patterns in multi-species bacterial colonies / L. Xiong, Y. Cao, Cooper R., Rappel W.-J., Hasty J., Tsimring L. // eLife. – 14.03.2023. – Режим доступа: <https://elifesciences.org/articles/48885>.
2. Kawasaki, K. Modeling spatio-temporal patterns generated by *Bacillus subtilis* / K. Kawasaki, A. Mochizuki, M. Matsushita, T. Umeda, N. Shigesada // Journal of Theoretical Biology. – 1997. – № 188. – P. 177–185.
3. Шевкун, И.А. Вариация моделей дендритоподобной морфологии бактериальных культур: численная реализация в рамках реакционно-диффузионного приближения / И. А. Шевкун, А. Г. Масловская // Вестник АмГУ. Серия «Математика. Прикладная математика». – Благовещенск: АмГУ. – 2023. – Вып. 101. – С. 30–39.
4. Shuai, Y. Modeling of bacterial communication in the extended range of population dynamics / Y. Shuai, A.G. Maslovskaya, C. Kuttler // Mathematical biology and bioinformatics. – 2023. – V. 18(1). – P. 89–104.
5. Fractal geometry: mathematical foundations and applications / K. J. Falconer. – Chichester: Wiley, 2014. – 400 p.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 122082400001-8.

### Информация об авторах

**Шевкун Иван Александрович** – магистрант 1 года обучения, млад. науч. сотр. лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем Амурского государственного университета. E-mail: smallwood13@gmail.com.

**Масловская Анна Геннадьевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: maslovskayaag@mail.ru.



## РЕАКЦИОННО-ДИФфуЗИОННО-КОНВЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА КОММУНИКАЦИИ БАКТЕРИЙ В МИКРОФЛЮИДНЫХ СИСТЕМАХ

И. Шуай, А. Г. Масловская

*Амурский государственный университет, Благовещенск*

**Аннотация.** В работе предложена модификация детерминированной модели коммуникации бактерии в условиях развития биопленок в микрофлюидных системах. Математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений, определяющих реакционно-диффузионно-конвективные процессы в основных химических субстанциях, характеризующих кворум эволюционирующей биопленки, и динамику микрофлюидной среды. Модель реализована методом конечных элементов в COMSOL Multiphysics. В вычислительных экспериментах рассмотрен эффект влияния пограничного слоя жидкости на неравномерное распределение субстанций кворума и рост биопленки.

**Ключевые слова:** коммуникация бактерий, биопленка, микрофлюидная система, процесс «реакция-диффузия-конвекция», метод конечных элементов

## A REACTION-DIFFUSION-CONVECTION MODEL OF THE BACTERIAL COMMUNICATION IN MICROFLUID SYSTEMS

Y. Shuai, A. G. Maslovskaya

*Amur State University, Blagoveshchensk*

**Abstract.** In the paper a modification of the deterministic model of bacterial communication for development of biofilms in microfluidic systems is proposed. The mathematical model is governed by a system of differential equations describing the reaction-diffusion-convection processes in key chemical substances characterizing the quorum of evolving biofilms, and the dynamics of the microfluidic system. The model is implemented by the finite element method in COMSOL Multiphysics. In computational experiments, the effect of the influence of the liquid boundary layer on the uneven distribution of quorum substances and the growth of a biofilm is considered.

**Key words:** bacterial communication, biofilm, microfluidic system, reaction-diffusion-convection process, finite element method

Биопленки представляют собой большое количество микроорганизмов на границе раздела фаз (твердой и жидкой). Бактериальные пленки образуются путем прикрепления бактерий к контактной поверхности живых или неживых объектов в условиях изменения факторов окружающей среды: нехватка или избыток питательных веществ, высокое осмотическое давление, низкий pH, окислительный стресс, обработка противомикробными препаратами. Биопленки образуются в результате их собственной секреции внеклеточного полимерного вещества (матрицы), фибрина, липопroteина и других внеклеточных липопroteинов. Биопленки часто вызывают негативные эффекты в промышленности, здравоохранении, продовольствии, что стимулирует развитие научных исследований, направленных на ликвидацию этих биосистем или эффективный контроль над их жизнедеятельностью.

Современные исследования свидетельствуют о том, что бактериальное чувство кворума участвует во всех стадиях формирования биопленки и сигнальные молекулы, обеспечивающие коммуникацию, могут проникать во внешнюю среду через биопленку. Эти



сигнальные молекулы могут проходить через биологические мембраны и инициировать синтез новых сигнальных молекул от других бактерий, тем самым координируя их поведение. Стратегии подавления бактериального кворума способствуют деградации биопленок. Ингибиторы кворума повышают успешность лечения антибиотиками, снижая при этом патогенность бактерий. Разработке и применению математического аппарата и компьютерной симуляции указанных систем посвящен широкий ряд исследований (см., например, обзор [1]).

Другие исследования показывают, что в жидкой среде гидродинамические процессы существенно влияют на рост биопленки [2]. Настоящая работа продолжает предшествующие исследования, направленные на развитие реакционно-диффузионных моделей коммуникации бактерий [3]. Акцент данного исследования сделан на построении и численной реализации интегрированной модели, объединяющей реакционно-диффузионно-конвективную модель чувства кворума, связанные уравнения динамики микрофлюидной среды и роста биопленки. Методологическая основа вычислительной реализации модели представлена методом конечных элементов. Вычислительные эксперименты ориентированы на применение платформы COMSOL Multiphysics.

Геометрическая схема модели включает две области: область биопленки (область  $A$ ) и зона жидкости (область  $B$ ). Обобщенная математическая модель включает модель кворума, модель динамики микрофлюидной среды и соотношение связи для симуляции роста колонии. Модель бактериального кворума [3] модифицирована к виду начально-краевой задачи для системы полулинейных уравнений типа (ненулевые генерационные слагаемые соответствуют области  $A$ , ненулевые компоненты потока – области  $B$ ).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_{AHL} \Delta u - \gamma_{AHL} u - \gamma_{L \rightarrow AHL} L u - v_x \frac{\partial u}{\partial x} - v_y \frac{\partial u}{\partial y} + F_1, & F_1(u) = \alpha_{AHL} + \beta_{AHL} \frac{u^n}{u_{th}^n + u^n}, \\ \frac{\partial L}{\partial t} = D_L \Delta L - \gamma_L L - v_x \frac{\partial L}{\partial x} - v_y \frac{\partial L}{\partial y} + F_2, & F_2(u) = \beta_L \frac{u^n}{(u_{th} + \varepsilon)^n + u^n}, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = 0, L(x, y, 0) = 0, 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, 0 < t \leq \bar{t}, \quad (3)$$

где  $u(x, y, t)$  – концентрация AHL (основная субстанция, характеризующая уровень кворума), моль/л;  $L(x, y, t)$  – концентрация лактоназы (фермент, деградирующий кворум), моль/л;  $\Gamma$  – граница области решения  $0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$ ;  $\bar{t}$  – время наблюдения процесс, час;  $D_{AHL}, D_L, \gamma_{AHL}, \gamma_L, \gamma_{L \rightarrow AHL}$  – положительные параметры, ответственными за процессы диффузии и деградации веществ;  $\alpha_{AHL}, \beta_{AHL}, \beta_L, u_{th}, \varepsilon, n$  – положительные параметры модели [3].

Система (1) содержит конвективную часть (для зоны  $B$ );  $v_x, v_y$  определяют скорость потока жидкости, которые определим, решая совместно уравнения Навье – Стокса, учитывая условие несжимаемости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y)^T, \quad (4)$$

где  $\mu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление. Уравнение (4) дополняется заданием начальных и граничных условий для скорости и давления.

В качестве упрощающего предположения в модель введена линейная зависимость между изменением концентрации AHL и геометрическими размерами биопленки.

Модель (1) – (4) реализована методом конечных элементов с использованием возможностей среды научных и инженерных расчетов COMSOL Multiphysics. Для проведения вычисленного эксперимента использованы параметры из [3] для бактериального вида *P. putida*. При нулевой скорости 0 входного потока, распределение AHL полностью зависит от молекулярной диффузии, и из-за отрицательной обратной связи с лактоназой на

границе биопленки образуются области с высокой концентрацией AHL, биопленка быстро растет на границе.

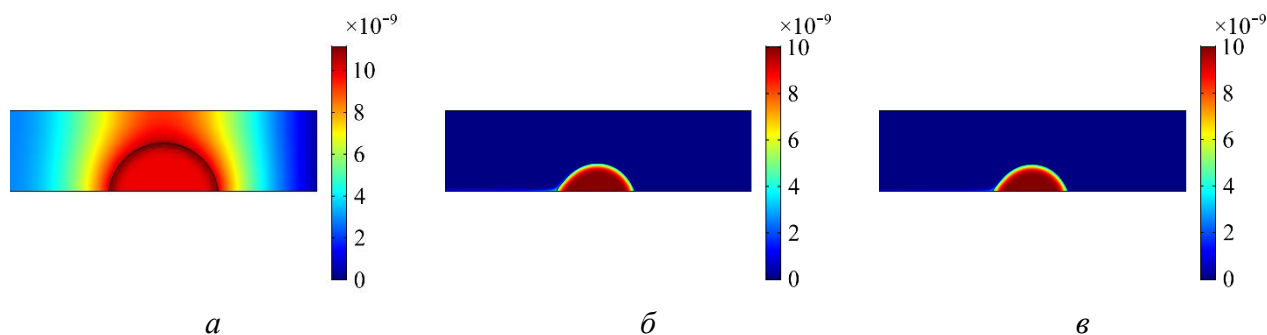


Рисунок 1 – Распределение концентрации AHL (моль/л) и изменение площади биопленки при  $\bar{t} = 20$  час и при вариации скорости входного потока жидкости: (а) – 0 м/час, (б) – 0.2 м/час, (в) – 0.5 м/час

После добавления условия микрофлюидной среды, на концентрации AHL и лактоназы стали существенно влиять конвективные процессы. Конвекция (даже при низких числах Рейнольдса) оказывает огромное влияние на интенсивность межклеточной коммуникации. Поскольку скорость роста биопленки линейно коррелирует с концентрацией AHL, площадь биопленки значительно уменьшается. По сравнению с условиями без потока жидкости значение концентрации AHL и лактоназы при 20 час снижается более чем в 2 раза. Такой же характер поведения наблюдается для площади биопленок, коррелированной с концентрацией AHL. Этот вывод согласуется с выводами, полученными в [4].

### Библиографический список

1. Perez-Velazquez, J. Mathematical modelling of bacterial quorum sensing: a review / J. Perez-Velazquez, M. G'olgel, R. Contreras Garcia // Bull. Math. Biol. – 2016. – V. 78(8). – P. 1585–1639.
2. Nadell, C. D. Flow environment and matrix structure interact to determine spatial competition in *Pseudomonas aeruginosa* biofilms / C. D. Nadell, D. Ricaurte, J. Yan, et al. // Elife. – 2017. – V. 6. – P. e21855. – DOI: 10.7554/eLife.21855.001.
3. Shuai, Y. Modeling of bacterial communication in the extended range of population dynamics / Y. Shuai, A.G. Maslovskaya, C. Kuttler // Mathematical biology and bioinformatics. – 2023. – V. 18(1). – P. 89–104.
4. Eberl, H. J. Exposure of biofilms to slow flow fields: the convective contribution to growth and disinfection / H. J. Eberl, R. Sudarsan // Journal of theoretical biology. – 2008. – V. 253(4). – P. 788–807. – DOI: 10.1016/j.jtbi.2008.04.013.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

### Информация об авторах

**Шуай Исюань** – аспирант 1-го года обучения, Амурский государственный университет. E-mail: 706603568@qq.com.

**Масловская Анна Геннадьевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета. E-mail: maslovskayaag@mail.ru.

## РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

А. А. Юзвук<sup>1</sup>, К. С. Кузнецов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

<sup>2</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

**Аннотация.** В работе представлен неклассический способ численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных с использованием нейронных сетей на примере сингулярно возмущенных задач. Представлено сравнение решений двух сингулярно возмущенных систем при помощи аппроксимации нейронными сетями в сравнении с их решением методом конечных разностей. Показана способность нейронных сетей получать решение задачи в области точек поворота. Показаны другие преимущества и потенциал предлагаемого метода при решении сингулярно возмущенных задач.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения в частных производных, сингулярно-возмущенные задачи, нейронные сети, PINN

## SOLVING SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS USING PHYSICS INFORMED NEURAL NETWORKS

A. A. Yuzvuk<sup>1</sup>, K. S. Kuznetsov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Far Eastern Federal University, Vladivostok

<sup>2</sup> Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok

**Abstract.** The paper presents a non-classical method for numerically solving the systems of partial differential equations using neural networks on the example of singularly perturbed problems. The solutions of two singularly perturbed systems using approximation by neural networks are presented in comparison with their solution by the finite difference method. The ability of neural networks to obtain the solution of the problem in the region of turning points is shown. Other advantages and potential of the proposed method for solving singularly perturbed problems are shown.

**Key words:** partial differential equations, singularly perturbed problems, neural networks, PINN

Решение сингулярно возмущенных задач представляет интерес, поскольку данные задачи часто встречаются в различных областях прикладной математики при моделировании физических процессов. Особенностью данных задач является наличие переходных слоев – зон быстрого изменения функции, которые, как известно, плохо поддаются решению классическими численными методами и требуют сгущения сетки в отдельных областях или иных дополнительных манипуляций [1].

В данной работе было получено численное решение сингулярно возмущенных задач, использующий аппроксимацию решения при помощи нейронных сетей. Сам подход – использование нейронных сетей в вычислительной математике – представляет отдельный интерес. Теоретический базис исследований в области применения PINN - нейронных сетей, учитывающих физику моделируемого процесса, для численного решения дифференциальных уравнений заложен в работе [2], описывающей численные решения некоторых дифференциальных уравнений. В текущей работе было проведено исследование применения данного подхода в области решения сингулярно возмущенных задач и было

выявлено, что он обладает ключевыми свойствами, которые определяют целесообразность его применения: простота использования и хорошая точность при решении.

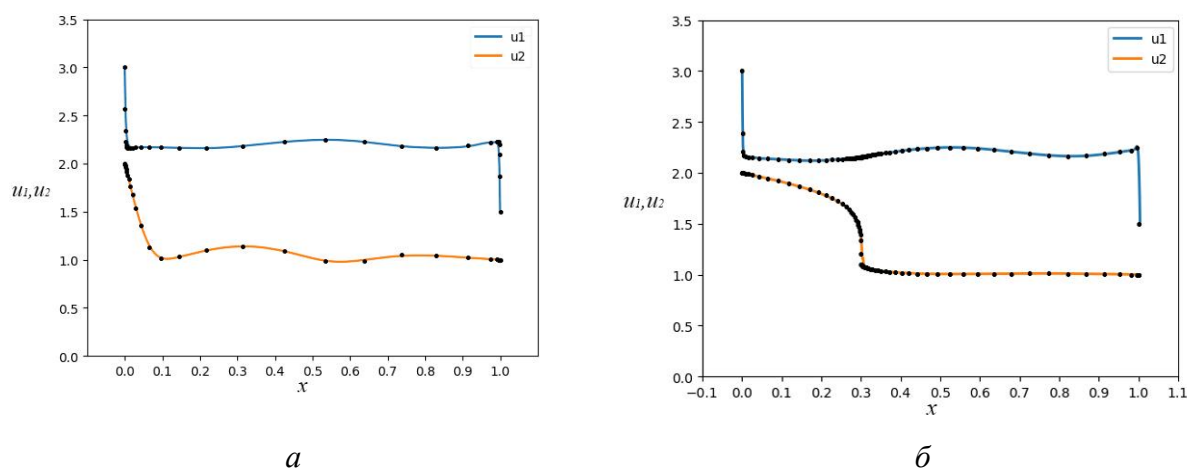


Рисунок 1 – Сравнение решения систем (1) (а) и (2) (б) нейронной сетью (непрерывная линия) и методом конечных разностей (точки)

Сингулярно возмущенная задача описывается системой из двух уравнений с граничными условиями:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u_1'' + a_1(x)u_1' + 5u_1 + (u_1 - 4.5)^3 + u_2 + \sin(10x) &= 0, \\ -\varepsilon u_2'' + a_2(x)u_2' + 5u_2 + (u_2 - 2.5)^3 + u_1 + \cos(10x) &= 0, \\ u_1(0) = 3, \quad u_1(1) = 1.5, \quad u_2(0) = 2, \quad u_2(1) = 1, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1)$$

Одним из способов решения данной задачи является численный алгоритм, построенный на применении метода конечных разностей [1]. Однако данный метод обладает рядом недостатков, среди которых необходимость вывода функций оценок решения, рост требуемой вычислительной мощности при мелкой сетке, а также сложность реализации самого алгоритма решения.

Для решения подобного рода задач авторы используют алгоритм, основанный на использовании нейронных сетей. Нейронная сеть в данном случае выступает в качестве универсального аппроксиматора и позволяет получить приближенное решение, минимизируя разность квадратов невязки и разницы между полученным решением и граничными условиями:

$$\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (u_1^p(x_i) - u_1(x_i))^2 + \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (u_2^p(x_i) - u_2(x_i))^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_1(x_i))^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_2(x_i))^2 \rightarrow \min,$$

где  $N$  – число точек в интервале  $x \in [0, 1]$ ,  $N_b$  – число точек для граничных условий,  $u_1^p(x)$  – приближенное решение, полученное сетью для функции  $u_1(x)$ ,  $u_2^p(x)$  – приближенное решение, полученное сетью для функции  $u_2(x)$ ,  $r_1, r_2$  – невязки первого и второго уравнения системы (1) соответственно.

В работе рассмотрено решение системы (1) в двух случаях:

1) При  $a_1(x) = 5x(1-x)$ ,  $a_2(x) = 20(0.3-x)^3$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  задача имеет два пограничных слоя в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ . В данном случае эти точки являются точками поворота.

2) При  $a_1(x) = 5x(1-x)$ ,  $a_2(x) = 40(0.3-x)$  задача имеет три пограничных слоя и три точки поворота в точках  $x = 0, x = 0.3$  и  $x = 1$ .

Сравнение решений, полученных при помощи PINN и конечно-разностной схемы представлены на рис. 1, а и 1, б для первого и второго случая соответственно. Из рисунков видно, что предложенный алгоритм способен успешно получать решения в точках поворота даже при малых  $\varepsilon = 10^{-4} - 10^{-5}$ . Преимуществами предложенного алгоритма являются про-

стота реализации, относительно низкие требования вычислительной мощности, возможность адекватной аппроксимации решения в точках поворота и высокая точность при решении.

#### **Библиографический список**

1. Разностные сетки. Теория и приложения / В. Д. Лисейкин. – СО РАН, 2014. – 253 с. – ISBN 978-5-7692-1364-9.
2. Raissi, M. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations / M. Raissi, P. Perdikaris, G. Karniadakis // Journal of Computational Physics. – 2019. – V. 378. – P. 686–707. – DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.

#### **Информация об авторах**

**Юзвук Александра Андреевна** – студент 4-го курса ИМКТ ДВФУ, E-mail: sasha.79051@gmail.com.

**Кузнецов Кирилл Сергеевич** – аспирант ИМКТ ДВФУ, ассистент департамента математического и компьютерного моделирования ИМКТ ДВФУ. Инженер-исследователь Института прикладной математики ДВО РАН. E-mail: kuznetsovks17@gmail.com.

Научное издание

**Адрес редакции и издателя:**

675027, г. Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21

**Адрес типографии:**

675000, г. Благовещенск, ул. Мухина, 150а

**Вычислительные технологии и прикладная математика. Материалы II Международного семинара (12–16 июня 2023 г., Благовещенск).**

---

Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Амурский государственный университет». Подписано к печати 22.05.2023. Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 27,9. Тираж 100. Заказ 238. Бесплатно.

Отпечатано в типографии АмГУ.